1

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とする。曲線 $C: y=f(x)$ の点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 接線 l の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C と接線 l は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 以外に共有点をもたないことを示せ。

(4) 曲線 C, 接線 l, y 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(3\cos 3\theta,\ 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　AB^2 と BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの点 B と点 C の座標をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間において，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ -2)$ の定める平面を α とし，方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ が表す球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　球面 S の中心 P の座標と S の半径を求めよ。

(2)　実数 $s,\ t$ に対して，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすようにとる。このとき，D の座標を s, t を用いて表せ。

(3)　点 Q が平面 α 上を動き，点 R が球面 S 上を動くとき，Q と R の距離の最小値を求めよ。また，そのときの Q と R の座標をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

n, k を自然数とする。n 個のボールと k 個の箱がある。各箱は箱 1, 箱 2, $\cdots$, 箱 k のように表すものとする。n 個のボールを k 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。n 個のボールを投げ入れた後，箱 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を a_i とする。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　$n=4$，$k=5$ とする。このとき，$a_1=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$k\geqq 2$ とする。このとき，$a_1\times a_2=0$ となる確率を n, k を用いて表せ。

(3)　$k=4$ とする。このとき，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\neq 0$ となる確率を p_n とする。p_n の値を n を用いて表せ。

(4)　$k=4$ とし，p_n を (3) で求めたものとする。このとき，$r>0$ で数列 $\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a を $0<a<1$ となる実数とする。座標平面上において，長さが 4 の線分 PQ を考える。線分 PQ の端点 P は x 軸上を，端点 Q は y 軸上を動くとき，線分 PQ を $a:(1-a)$ の比に内分する点 R の軌跡は楕円になる。この楕円を C とする。ただし，円は楕円の特別な場合とする。次の問いに答えよ。

(1) 楕円 C の方程式を a を用いて表せ。

(2) 楕円 C で囲まれた部分と連立不等式 $x \geqq 0$，$\sqrt{3}ax \geqq (1-a)y$ の表す領域の共通部分の面積を S とする。S を a を用いて表せ。

(3) 面積 S の最大値とそのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ に対し，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+A$　(A は定数)

(2)　$f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ となり，$f'(0)=\dfrac{1}{4}$ より，$C: y=f(x)$ の点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線 l の方程式は，$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ である。

(3)　$C: y=f(x)$ と $l: y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ を連立して，$\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ ………(＊)

ここで，$g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$ とおくと，(＊)は $g(x)=0$ となり，

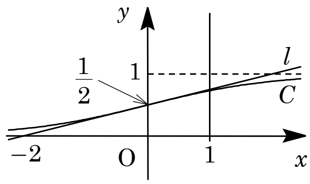
$$g'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{4}=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$$
$$=-\frac{e^{2x}-2e^x+1}{4(e^x+1)^2}=-\frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

これより，$g(x)$ の増減は右表のようになり，(＊)の解は $x=0$ だけである。

したがって，C と l は点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$以外に共有点をもたない。

(4)　(3)から，$x>0$ において，$g(x)<0$ から C は l の下側にある。また，l と直線 $x=1$ の交点は$\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$となり，$C$, l, y 軸および $x=1$ で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot 1-\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\frac{5}{8}-\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\frac{5}{8}-\{\log(e+1)-\log 2\}=\frac{5}{8}-\log\frac{e+1}{2}$$

［解　説］

基本的な微積分の総合問題です。複雑な計算もありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$A(-2,\ 0)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(3\cos 3\theta,\ 3\sin 3\theta)$に対して，

$$AB^2 = (\cos\theta + 2)^2 + \sin^2\theta = 1 + 4\cos\theta + 4 = 5 + 4\cos\theta$$

$$\begin{aligned}BC^2 &= (3\cos 3\theta - \cos\theta)^2 + (3\sin 3\theta - \sin\theta)^2\\ &= 9 - 6(\cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta) + 1 = 10 - 6\cos(3\theta - \theta)\\ &= 10 - 6\cos 2\theta = 10 - 6(2\cos^2\theta - 1) = 16 - 12\cos^2\theta\end{aligned}$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$において$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$であり，(1)から，

$$\begin{aligned}AB^2 + BC^2 &= (5 + 4\cos\theta) + (16 - 12\cos^2\theta) = -12\cos^2\theta + 4\cos\theta + 21\\ &= -12\left(\cos\theta - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{64}{3}\end{aligned}$$

すると，$\cos\theta = \dfrac{1}{6}$のとき$AB^2 + BC^2$は最大値$\dfrac{64}{3}$をとる。このとき$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$から$B\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{\sqrt{35}}{6}\right)$である。3 倍角の公式から，$3\cos 3\theta = 3\cdot\dfrac{1}{6}\left(4\cdot\dfrac{1}{36} - 3\right) = -\dfrac{13}{9}$，$3\sin 3\theta = 3\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{6}\left(3 - 4\cdot\dfrac{35}{36}\right) = -\dfrac{4}{9}\sqrt{35}$となり，$C\left(-\dfrac{13}{9},\ -\dfrac{4}{9}\sqrt{35}\right)$である。

また，$\cos\theta = 1$のとき$AB^2 + BC^2$は最小値13をとる。このとき$\sin\theta = 0$から$B(1,\ 0)$である。そして，$3\cos 3\theta = 3$，$3\sin 3\theta = 0$より$C(3,\ 0)$である。

［解 説］

三角関数の基本的な計算問題です。

3

問題のページへ

(1)　$S: x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ に対して,

$$(x+1)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=9$$

これより，球面 S の中心は $\mathrm{P}(-1,\ 5,\ -2)$，半径は $r=\sqrt{9}=3$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ -2)$ のとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=(1-s-t)(1,\ 0,\ 0)+s(0,\ -1,\ 0)+t(0,\ 0,\ -2)\\&=(1-s-t,\ -s,\ -2t)\end{aligned}$$

これより，$\mathrm{D}(1-s-t,\ -s,\ -2t)$ である。

(3)　3 点 A, B, C を含む平面 α に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ -2)$

さて，点 P から α に下ろした垂線の足 H は，$\mathrm{H}(1-s-t,\ -s,\ -2t)$ と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1-s-t+1,\ -s-5,\ -2t+2)=(-s-t+2,\ -s-5,\ -2t+2)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となり，

$$-(-s-t+2)-(-s-5)=0\cdots\cdots①,\quad -(-s-t+2)-2(-2t+2)=0\cdots\cdots②$$

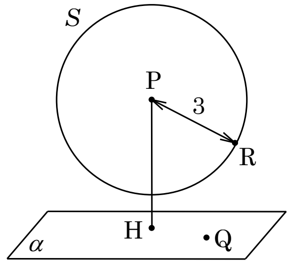
①から $2s+t=-3$，②から $s+5t=6$ となり，まとめると $s=-\dfrac{7}{3}$，$t=\dfrac{5}{3}$ である。

すると，$\mathrm{H}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3},\ -\dfrac{10}{3}\right)$ となり，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}+1\right)^2+\left(\frac{7}{3}-5\right)^2+\left(-\frac{10}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=4$$

これより，$\mathrm{PH}>r$ となり，平面 α 上を動く点 Q と球面 S 上を動く点 R の距離の最小値は,

$$\mathrm{PH}-r=4-3=1$$



このときの点 Q は，点 H と一致するので,

$$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{10}{3}\right)$$

そして，点 R は線分 PH を $3:1$ に内分する点となり，

$\left(\dfrac{-1+5}{4},\ \dfrac{5+7}{4},\ \dfrac{-2-10}{4}\right)$ から $\mathrm{R}(1,\ 3,\ -3)$ である。

［解 説］

球面と平面の関係の問題です。誘導に従って解いていきましたが，初めに平面の方程式を立式し，点と平面の距離の公式を利用すると，記述量が減少します。

4

問題のページへ

n 個のボールを k 個の箱へ投げ入れ，箱 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を a_i とおく。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ である。

(1)　$n=4$，$k=5$ のとき，$a_1=0$ となるのは，ボールを箱 1 以外に投げ入れる場合より，その確率は $\dfrac{4^4}{5^4}=\dfrac{256}{625}$ である。

(2)　$a_i=0$ となる事象を A_i とし，その確率を $P(A_i)$ とおく。

さて，$k\geqq 2$ のとき，$a_1\times a_2=0$ となる事象は $A_1\cup A_2$ であり，(1)と同様に考え，

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{(k-1)^n}{k^n}+\frac{(k-1)^n}{k^n}-\frac{(k-2)^n}{k^n}=\frac{2(k-1)^n-(k-2)^n}{k^n}$$

(3)　$k=4$ のとき，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=0$ となる事象は $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ であり，

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)+P(A_4)-P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4)$$

ここで，$Q=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$，$R=P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4)$ とおくと，

$$Q=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)$$
$$+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$R=P((A_1\cap A_4)\cup(A_2\cap A_4)\cup(A_3\cap A_4))$$
$$=P(A_1\cap A_4)+P(A_2\cap A_4)+P(A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_4)$$
$$-P(A_1\cap A_3\cap A_4)-P(A_2\cap A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

まとめると，$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$ は，

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_4)$$
$$-P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_4)-P(A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)$$
$$+P(A_1\cap A_3\cap A_4)+P(A_2\cap A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)(2)と同様に考えると，

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=4\cdot\frac{3^n}{4^n}-6\cdot\frac{2^n}{4^n}+4\cdot\frac{1^n}{4^n}-0=\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$$

したがって，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\neq 0$ となる確率 p_n は，

$$p_n=1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$$

(4)　$$p_{n+1}-p_n=\left(1-\frac{4\cdot 3^{n+1}-6\cdot 2^{n+1}+4}{4^{n+1}}\right)-\left(1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}\right)$$
$$=\frac{-(4\cdot 3^{n+1}-6\cdot 2^{n+1}+4)+(16\cdot 3^n-24\cdot 2^n+16)}{4^{n+1}}=\frac{4\cdot 3^n-12\cdot 2^n+12}{4^{n+1}}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\left\{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

これより，$r^n(p_{n+1}-p_n)=\left(\dfrac{3}{4}r\right)^n\left\{1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ となる。

すると，$\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束する正の数 r の条件は，$0<\dfrac{3}{4}r\leqq 1$ より，$0<r\leqq\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

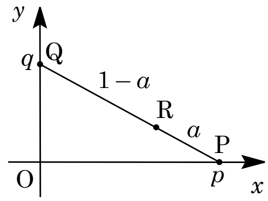
確率の標準的な問題です。(3)は設問の流れから，4 つの事象の和事象の確率として求めましたが，確認のため(＊)の式を導くプロセスも記しておきました。なお，空箱の数で場合分けする方法もありますが。

5

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$ に対して，$\mathrm{PQ}=4$ より，

$$\sqrt{p^2+q^2}=4,\ \ p^2+q^2=16\ \cdots\cdots\cdots①$$



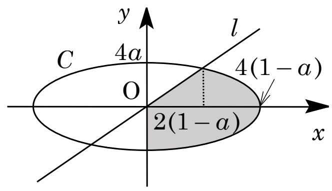
ここで，$0<a<1$ として，線分 PQ を $a:(1-a)$ の比に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，$x=(1-a)p$，$y=aq$ から，

$$p=\frac{x}{1-a}\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ q=\frac{y}{a}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，点 R の軌跡 C の方程式は，

$$\left(\frac{x}{1-a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=16,\ \ \frac{x^2}{16(1-a)^2}+\frac{y^2}{16a^2}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$\dfrac{x^2}{16(1-a)^2}+\dfrac{y^2}{16a^2}\leqq 1$，$x\geqq 0$，$\sqrt{3}ax\geqq(1-a)y$ で表される領域 D について，C と $l:\sqrt{3}ax=(1-a)y$ の交点は，④と $\dfrac{\sqrt{3}x}{1-a}=\dfrac{y}{a}$ を連立して，

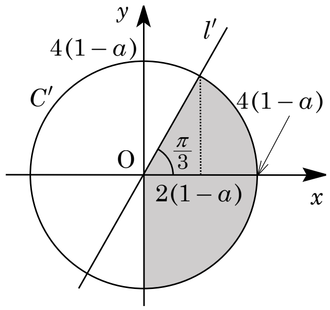


$$\left(\frac{x}{1-a}\right)^2+3\left(\frac{x}{1-a}\right)^2=16,\ \left(\frac{x}{1-a}\right)^2=4$$

すると，$x^2=4(1-a)^2$ となり，$x>0$ から $x=2(1-a)$ である。

このとき，領域 D の面積を S とする。

さて，右上図を y 軸方向に $\dfrac{1-a}{a}$ 倍すると，曲線 C は中心が原点で半径が $4(1-a)$ の円 C' となり，また直線 $l:\sqrt{3}ax=(1-a)y$ は直線 $l':\sqrt{3}x=y$ になる。



すると，直線 l' と x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるので，右図の網点部の領域 D' の面積 S' は，

$$S'=\frac{1}{2}\{4(1-a)\}^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{20}{3}\pi(1-a)^2$$

これより，$S=\dfrac{a}{1-a}S'=\dfrac{a}{1-a}\cdot\dfrac{20}{3}\pi(1-a)^2=\dfrac{20}{3}\pi a(1-a)$ となる。

(3)　(2)から，$S=\dfrac{20}{3}\pi(a-a^2)=\dfrac{20}{3}\pi\left\{-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$

すると，$0<a<1$ から，面積 S は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{20}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{3}\pi$ をとる。

［解　説］

楕円についての有名問題です。(2)は楕円を円に変換して面積計算をしました。