

1

解答例のページへ

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定める。次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して, $\alpha^{n+1} - \alpha^n = \alpha^{n-1}$, $\beta^{n+1} - \beta^n = \beta^{n-1}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち, $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) である。 b_1 を求めよ。また, $n \geq 2$ に対して, $b_n = a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。
- (4) 自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1$ が成り立つことを示せ。
- (5) 自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_n a_{n+1} + 2$ が成り立つことを示せ。

2

解答例のページへ

2 つの関数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = |x^2 - 2x - 3| - |x^2 - x|$ について, それらの合成関数 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$ のとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$ のとき, $h(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) 関数 $y = h(x)$ $\left(\frac{1}{16} \leq x \leq 4\right)$ のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の個数を求めよ。また, 共有点の x 座標をすべて求めよ。
- (4) a は定数とする。関数 $y = h(x)$ $\left(\frac{1}{16} \leq x \leq 4\right)$ のグラフと直線 $y = a$ が共有点をもつとき, その共有点の個数を a の値によって場合分けして求めよ。

3[解答例のページへ](#)

次の条件(☆)を満たす複素数 z を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

(☆) iz^2 は実数であって、 $0 \leq iz^2 \leq 2$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) $iz^2 = 2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。
- (2) $0 < iz^2 \leq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) 条件(☆)を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 複素数 z が(3)の S を動くとき、 $\frac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

4

解答例のページへ

座標平面上の曲線 $y = x \sin^2 x$ を C とする。自然数 n に対して、曲線 C 上に点 $P_n(n\pi, 0)$ 、点 $Q_n\left(\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n-1}{2}\pi\right)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 P_n における接線の方程式を求めよ。また、曲線 C 上の点 Q_n における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と線分 $P_n P_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 S_n を n を用いて表せ。

(3) 曲線 C と線分 $Q_n Q_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 T_n を n を用いて表せ。

(4) S_n と T_n は、(2)と(3)で求めたものとする。極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k S_n}{\sum_{n=1}^k T_n}$ を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対し, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$

ここで, $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ とおくと, $a_1 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $a_2 = \alpha^1 + \beta^1 = 1$ となり,

$$a_3 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1 + 3 = 4$$

$$a_5 = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 9 - 2 = 7$$

- (2) α , β は $x^2 - x - 1 = 0$ の解なので, $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

すると, $\alpha^2 - \alpha = 1$ から, 両辺に α^{n-1} をかけると $\alpha^{n+1} - \alpha^n = \alpha^{n-1}$ ①

また, $\beta^2 - \beta = 1$ から, 両辺に β^{n-1} をかけると, $\beta^{n+1} - \beta^n = \beta^{n-1}$ ②

- (3) ①②から, $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - (\alpha^n + \beta^n) = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ となり,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_n \text{③}$$

ここで, $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと, $b_1 = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1$

また, ③から $n \geq 2$ で, $a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$ となり, $b_n = a_{n-1}$ ($n \geq 2$)④

- (4) ④から, $b_{n+1} = a_n$ ($n \geq 1$) となり,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_{k+1} = \sum_{k=1}^n (a_{k+2} - a_{k+1}) = a_{n+2} - a_2$$

(1)から $a_2 = 1$ なので, $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1$ が成り立つ。

- (5) 自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_n a_{n+1} + 2$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $\sum_{k=1}^1 a_k^2 - (a_1 a_2 + 2) = 2^2 - (2 \cdot 1 + 2) = 0$ となり成立する。

(ii) $n=l$ のとき $\sum_{k=1}^l a_k^2 = a_l a_{l+1} + 2$ の成立を仮定すると, ③より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - (a_{l+1} a_{l+2} + 2) &= (a_l a_{l+1} + 2) + a_{l+1}^2 - (a_{l+1} a_{l+2} + 2) \\ &= a_{l+1} (a_l + a_{l+1} - a_{l+2}) = 0 \end{aligned}$$

すると, $n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, 自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_n a_{n+1} + 2$ が成り立つ。

[コメント]

漸化式についての基本題です。非常に細かな誘導が付いています。なお, (5)は数学的帰納法を利用しました。初めは, (4)と同じく直接的に示そうと思ったのですが。

2

問題のページへ

- (1) $f(x) = \log_2 x$ に対して, $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$ のとき $\log_2 \frac{1}{16} \leq \log_2 x \leq \log_2 4$ となり,

$$\log_2 2^{-4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^2, \quad -4 \leq f(x) \leq 2$$

- (2) $g(x) = |x^2 - 2x - 3| - |x^2 - x|$ に対して, $t = \log_2 x$ とおくと,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_2 x) = g(t)$$

$$\text{さて, } g(t) = |t^2 - 2t - 3| - |t^2 - t| = |(t+1)(t-3)| - |t(t-1)| \text{ から,}$$

- (i) $-4 \leq t \leq -1$ ($\frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{2}$) のとき $g(t) = (t^2 - 2t - 3) - (t^2 - t) = -t - 3$

- (ii) $-1 \leq t \leq 0$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$) のとき

$$g(t) = -(t^2 - 2t - 3) - (t^2 - t) = -2t^2 + 3t + 3 = -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{33}{8}$$

- (iii) $0 \leq t \leq 1$ ($1 \leq x \leq 2$) のとき $g(t) = -(t^2 - 2t - 3) + (t^2 - t) = t + 3$

- (iv) $1 \leq t \leq 2$ ($2 \leq x \leq 4$) のとき

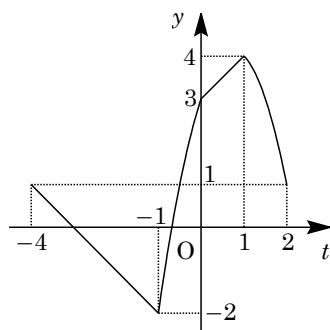
$$g(t) = -(t^2 - 2t - 3) - (t^2 - t) = -2t^2 + 3t + 3$$

- (i)~(iv)より, $y = g(t)$ のグラフは右図のようになる。

すると, (1)より $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$ のとき $-4 \leq t \leq 2$ となり,

$h(x) = g(t)$ から $h(x)$ のとりうる値の範囲は,

$$-2 \leq h(x) \leq 4$$



- (3) $t = \log_2 x$ から, t と $x > 0$ は 1 対 1 の対応をすること

に注意すると, $y = h(x)$ ($\frac{1}{16} \leq x \leq 4$) のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の個数は,

$y = g(t)$ ($-4 \leq t \leq 2$) のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の個数に等しい。

したがって, 右上図から 3 個となる。

ここで, $y = -2t^2 + 3t + 3$ ($-1 \leq t \leq 0$) と $y = 1$ を連立すると,

$$-2t^2 + 3t + 3 = 1, \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0, \quad (2t+1)(t-2) = 0$$

これより $t = -\frac{1}{2}$ となるので, $y = g(t)$ と $y = 1$ の共有点は, 右上図から

$t = -4, -\frac{1}{2}, 2$ である。すると, $y = h(x)$ と $y = 1$ の共有点の x 座標は,

$$x = 2^{-4}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^2 \text{ すなわち } x = \frac{1}{16}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4$$

- (4) $y = h(x)$ ($\frac{1}{16} \leq x \leq 4$) のグラフと直線 $y = a$ (a は定数) が共有点をもつとき,

その個数は, 右上図から, $a = -2, 4$ のとき 1 個, $-2 < a < 1, 1 < a < 4$ のとき 2 個, $a = 1$ のとき 3 個である。

[コメント]

合成関数を題材にした問題です。ただ、絶対値をはずすための場合分けが煩雑なため、時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

- (1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ から,

$$iz^2 = r^2 \left\{ \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cdots \cdots (*)$$

$iz^2 = 2$ のとき, $r^2 = 2$ かつ $2\theta + \frac{\pi}{2} = 2n\pi$ (n は整数) から, $r = \sqrt{2}$ となる。

また, $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, $n = 1, 2$ となり $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ であるので

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -1 + i, \quad z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = 1 - i$$

- (2) $0 < iz^2 \leq 2$ のとき, (*) から $2\theta + \frac{\pi}{2} = 2m\pi$ (m は整数) となる。

そこで, $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ である。

- (3) 条件 $0 \leq iz^2 \leq 2$ を満たす複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 全体の集合を S とすると,

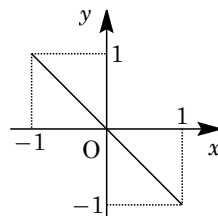
- (i) $0 < iz^2 \leq 2$ のとき

(*) より $0 < r^2 \leq 2$ ($0 < r \leq \sqrt{2}$) で, (2) から $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

- (ii) $iz^2 = 0$ のとき (*) より $r = 0$, すなわち $z = 0$ である。

- (i)(ii) より, 集合 S を複素数平面上に図示すると,

線分: $y = -x$ ($-1 \leq x \leq 1$)



- (4) (3) から, $z = x - xi$ ($-1 \leq x \leq 1$) とおくことができ, このとき複素数 w を,

$$w = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{x+2-xi} = 1 - \frac{2(x+2+xi)}{(x+2)^2 + x^2}$$

ここで, w の実部を $f(x)$ とおくと, $f(x) = 1 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2 + x^2} = 1 - \frac{x+2}{x^2 + 2x + 2}$

$$f'(x) = -\frac{(x^2 + 2x + 2) - (x+2)(2x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における $f'(x) = 0$ の解は $x = -2 + \sqrt{2}$ から, $f(x)$ の増減は右表のようになる。すると, $f(x)$ すなわち w の実部の最小値は,

x	-1	⋯	$-2 + \sqrt{2}$	⋯	1
$f'(x)$		—	0	+	0
$f(x)$		↘		↗	

$$f(-2 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + (-2 + \sqrt{2})^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

[コメント]

複素数の計算と微分法の融合した標準的な問題です。

4

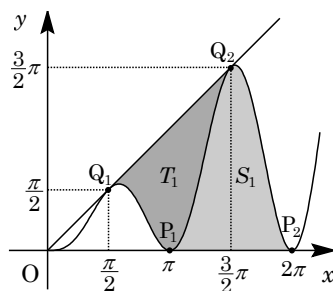
問題のページへ

- (1) 曲線
- $C: y = x \sin^2 x$
- に対して,

$$y' = \sin^2 x + 2x \sin x \cos x = \sin^2 x + x \sin 2x$$

すると, C 上の点 $P_n(n\pi, 0)$ における接線の方程式は, $y' = 0$ から $y = 0$ である。また, C 上の点 $Q_n\left(\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n-1}{2}\pi\right)$ における接線の方程式は, $y' = 1$ から,

$$y - \frac{2n-1}{2}\pi = 1 \cdot \left(x - \frac{2n-1}{2}\pi\right), \quad y = x$$



- (2) 曲線
- C
- と線分
- $P_n P_{n+1}$
- で囲まれる部分の面積
- S_n
- は,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x(1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{ (n+1)^2 \pi^2 - n^2 \pi^2 \} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \frac{2n+1}{2} \pi^2 - \frac{1}{4} \{ (n+1)^2 \pi^2 - n^2 \pi^2 \} = \frac{2n+1}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

- (3) 曲線
- C
- と線分
- $Q_n Q_{n+1}$
- で囲まれる部分の面積
- T_n
- は,

$$\begin{aligned} T_n &= \int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} (x - x \sin^2 x) \, dx = \int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} x \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} x(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} - \frac{1}{2} \int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 - \frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \right\} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \\ &= n\pi^2 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 - \frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \right\} = \frac{n}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^k S_n = \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^k (2n+1) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{3 + (2k+1)}{2} \cdot k = \frac{\pi^2}{4} \cdot k(k+2)$$

$$\sum_{n=1}^k T_n = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^k n = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{2} k(k+1) = \frac{\pi^2}{4} \cdot k(k+1)$$

したがって, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k S_n}{\sum_{n=1}^k T_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{k}}{1 + \frac{1}{k}} = 1$ である。

[コメント]

定積分と面積についての問題です。積分計算については、三角関数の周期性に着目すると、見かけほど面倒ではありません。