$\boxed{1}$ 解答例のページへ

座標平面上の原点を O とし，1 点 $A(a,\ -1)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。また，放物線 $y=x^2$ 上に点 B をとる。ただし，B は原点以外の点とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 S を a を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最大になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 T を a を用いて表せ。

(3) S と T は，(1)と(2)で求めたものとする。$S=3T$ となるときの点 A の座標を求めよ。

2

解答例のページへ

実数 t に対して，$F(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\sin^2 x\,dx$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，関数 $y=e^{-2x}\sin^2 x$ の極値を求めよ。

(2) 実数 t に対して，$I(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\cos 2x\,dx$，$J(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\sin 2x\,dx$ とおく。このとき，次の 3 つの等式(a), (b), (c)が成り立つことを示せ。

(a) $F(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin^2 t+\dfrac{1}{2}J(t)$

(b) $I(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t-J(t)$

(c) $J(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+I(t)$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}F(t)$ を求めよ。

3

解答例のページへ

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，$\alpha^{n+1}-\alpha^n=\alpha^{n-1}$，$\beta^{n+1}-\beta^n=\beta^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。b_1 を求めよ。また，$n\geqq 2$ に対して，$b_n=a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(4)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-1$ が成り立つことを示せ。

(5)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立つことを示せ。

4

解答例のページへ

2 つの関数 $f(x)=\log_2 x$， $g(x)=\left|x^2-2x-3\right|-\left|x^2-x\right|$ について，それらの合成関数 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき，$h(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 関数 $y=h(x)\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の個数を求めよ。また，共有点の x 座標をすべて求めよ。

(4) a は定数とする。関数 $y=h(x)\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつとき，その共有点の個数を a の値によって場合分けして求めよ。

5

解答例のページへ

次の条件(☆)を満たす複素数 z を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(☆)　iz^2 は実数であって，$0 \leqq iz^2 \leqq 2$ である。

次の問いに答えよ。

(1)　$iz^2 = 2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。

(2)　$0 < iz^2 \leqq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(3)　条件(☆)を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(4)　複素数 z が(3)の S を動くとき，$\dfrac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$，放物線 $y=x^2$ 上の原点 O 以外の点 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ -1)\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ t^2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $at-t^2=0$ となり，$t\neq 0$ より $t=a$ である。

このとき $\mathrm{B}(a,\ a^2)$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S は，$a>0$ から，

$$S=\frac{1}{2}\left|a\cdot a^2-(-1)\cdot a\right|=\frac{1}{2}\left|a^3+a\right|=\frac{1}{2}a(a^2+1)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=at-t^2=-\left(t-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}$ から，内積の値は $t=\dfrac{a}{2}$ のとき最大になる。

このとき $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 T は，$a>0$ から，

$$T=\frac{1}{2}\left|a\cdot\frac{a^2}{4}-(-1)\cdot\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{a^3}{4}+\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{8}a(a^2+2)$$

(3)　$S=3T$ より，$\dfrac{1}{2}a(a^2+1)=\dfrac{3}{8}a(a^2+2)$ となり，$a>0$ から，

$$4(a^2+1)=3(a^2+2)\ ,\ a^2=2$$

したがって，$a=\sqrt{2}$ から，$\mathrm{A}(\sqrt{2},\ -1)$ となる。

［コメント］

ベクトルについての基本題です。なお，三角形の面積は公式処理をしています。

2

問題のページへ

(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y=e^{-2x}\sin^2 x$ に対して，

$$y'=-2e^{-2x}\sin^2 x+e^{-2x}\cdot 2\sin x\cos x=-2e^{-2x}\sin x(\sin x-\cos x)$$
$$=-2\sqrt{2}e^{-2x}\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ における y の増減は右表のようになり，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$，$x=0$ のとき極小値 0 をとる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	

(2)　$F(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\sin^2 x\,dx$，$I(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\cos 2x\,dx$，$J(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\sin 2x\,dx$

(a)　$F(t)=\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\sin^2 x\right]_0^t+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\cdot 2\sin x\cos x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin^2 t+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-2x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin^2 t+\frac{1}{2}J(t)$$

(b)　$I(t)=\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x\right]_0^t-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\cdot 2\sin 2x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2t}\cos 2t-1)-\int_0^t e^{-2x}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t-J(t)$$

(c)　$J(t)=\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x\right]_0^t+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t e^{-2x}\cdot 2\cos 2x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+\int_0^t e^{-2x}\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+I(t)$$

(3)　(b)(c)から，$J(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t-J(t)\right\}$ となり，

$$J(t)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}(\sin 2t+\cos 2t)\right\}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-2t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

(a)に代入して，$F(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin^2 t+\dfrac{1}{8}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}e^{-2t}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，$\left|e^{-2t}\sin^2 t\right|\leqq e^{-2t}$，$\left|e^{-2t}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq e^{-2t}$ から，$t\to\infty$ のとき，

$$e^{-2t}\sin^2 t\to 0,\quad e^{-2t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\to 0$$

したがって，(*)から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}F(t)=0+\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$ となる。

［コメント］

定積分の計算に極限を融合した問題です。(2)の等式の利用方法がポイントです。

3

問題のページへ

(1)　方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対し，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

ここで，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ とおくと，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=1$ となり，

$$a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2=3$$

$$a_4=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1+3=4$$

$$a_5=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=9-2=7$$

(2)　α，β は $x^2-x-1=0$ の解なので，$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$

すると，$\alpha^2-\alpha=1$ から，両辺に α^{n-1} をかけると $\alpha^{n+1}-\alpha^n=\alpha^{n-1}$ ………①

また，$\beta^2-\beta=1$ から，両辺に β^{n-1} をかけると，$\beta^{n+1}-\beta^n=\beta^{n-1}$ ………②

(3)　①②から，$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-(\alpha^n+\beta^n)=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ となり，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_n \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=a_2-a_1=1-2=-1$

また，③から $n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-a_n=a_{n-1}$ となり，$b_n=a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ………④

(4)　④から，$b_{n+1}=a_n$ $(n\geqq 1)$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_{k+1})=a_{n+2}-a_2$$

(1)から $a_2=1$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-1$ が成り立つ。

(5)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{1}{a_k}^2-(a_1a_2+2)=2^2-(2\cdot1+2)=0$ となり成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{l}{a_k}^2=a_la_{l+1}+2$ の成立を仮定すると，③より，

$$\sum_{k=1}^{l+1}{a_k}^2-(a_{l+1}a_{l+2}+2)=(a_la_{l+1}+2)+{a_{l+1}}^2-(a_{l+1}a_{l+2}+2)$$

$$=a_{l+1}(a_l+a_{l+1}-a_{l+2})=0$$

すると，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立つ。

［コメント］

漸化式についての基本題です。非常に細かな誘導が付いています。なお, (5)は数学的帰納法を利用しました。初めは, (4)と同じく直接的に示そうと思ったのですが。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$f(x)=\log_2 x$ に対して，$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき $\log_2\dfrac{1}{16}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 4$ となり，

$$\log_2 2^{-4}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 2^2,\ -4\leqq f(x)\leqq 2$$

(2)　$g(x)=\left|x^2-2x-3\right|-\left|x^2-x\right|$ に対して，$t=\log_2 x$ とおくと，

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\log_2 x)=g(t)$$

さて，$g(t)=\left|t^2-2t-3\right|-\left|t^2-t\right|=\left|(t+1)(t-3)\right|-\left|t(t-1)\right|$ から，

(i)　$-4\leqq t\leqq -1\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$g(t)=(t^2-2t-3)-(t^2-t)=-t-3$

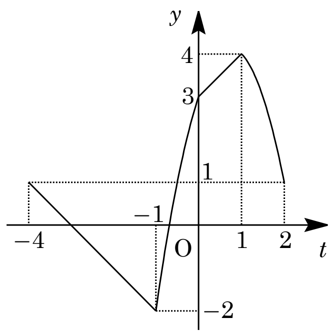
(ii)　$-1\leqq t\leqq 0\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)$ のとき

$$g(t)=-(t^2-2t-3)-(t^2-t)=-2t^2+3t+3=-2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$$

(iii)　$0\leqq t\leqq 1\ (1\leqq x\leqq 2)$ のとき　$g(t)=-(t^2-2t-3)+(t^2-t)=t+3$

(iv)　$1\leqq t\leqq 2\ (2\leqq x\leqq 4)$ のとき

$$g(t)=-(t^2-2t-3)-(t^2-t)=-2t^2+3t+3$$



(i)〜(iv)より，$y=g(t)$ のグラフは右図のようになる。

すると，(1)より $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき $-4\leqq t\leqq 2$ となり，

$h(x)=g(t)$ から $h(x)$ のとりうる値の範囲は，

$$-2\leqq h(x)\leqq 4$$

(3)　$t=\log_2 x$ から，t と $x>0$ は 1 対 1 の対応をすることに注意すると，$y=h(x)\ \left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の個数は，$y=g(t)\ (-4\leqq t\leqq 2)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の個数に等しい。

したがって，右上図から 3 個となる。

ここで，$y=-2t^2+3t+3\ (-1\leqq t\leqq 0)$ と $y=1$ を連立すると，

$$-2t^2+3t+3=1,\ 2t^2-3t-2=0,\ (2t+1)(t-2)=0$$

これより $t=-\dfrac{1}{2}$ となるので，$y=g(t)$ と $y=1$ の共有点は，右上図から $t=-4,\ -\dfrac{1}{2},\ 2$ である。すると，$y=h(x)$ と $y=1$ の共有点の x 座標は，

$$x=2^{-4},\ 2^{-\frac{1}{2}},\ 2^2\quad\text{すなわち}\quad x=\frac{1}{16},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 4$$

(4)　$y=h(x)\ \left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=a$（a は定数）が共有点をもつとき，その個数は，右上図から，$a=-2,\ 4$ のとき 1 個，$-2<a<1$，$1<a<4$ のとき 2 個，$a=1$ のとき 3 個である。

［コメント］

合成関数を題材にした問題です。ただ，絶対値をはずすための場合分けが煩雑なため，時間を費やしてしまいます。

5

問題のページへ

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$，$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$ から，

$$iz^2=r^2\left\{\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$iz^2=2$ のとき，$r^2=2$ かつ $2\theta+\frac{\pi}{2}=2n\pi$ (n は整数) から，$r=\sqrt{2}$ となる。

また，$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$n=1,\ 2$ となり $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ であるので

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=-1+i,\ \ z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=1-i$$

(2)　$0<iz^2\leqq 2$ のとき，$(*)$から $2\theta+\frac{\pi}{2}=2m\pi$ (m は整数) となる。

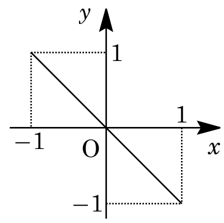
そこで，$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ である。

(3)　条件 $0\leqq iz^2\leqq 2$ を満たす複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 全体の集合を S とすると，

(i)　$0<iz^2\leqq 2$ のとき

$(*)$より $0<r^2\leqq 2$ $(0<r\leqq\sqrt{2})$ で，(2)から $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(ii)　$iz^2=0$ のとき　$(*)$より $r=0$，すなわち $z=0$ である。



(i)(ii)より，集合 S を複素数平面上に図示すると，

線分：$y=-x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(4)　(3)から，$z=x-xi$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ とおくことができ，このとき複素数 w を，

$$w=\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}=1-\frac{2}{x+2-xi}=1-\frac{2(x+2+xi)}{(x+2)^2+x^2}$$

ここで，w の実部を $f(x)$ とおくと，$f(x)=1-\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+x^2}=1-\frac{x+2}{x^2+2x+2}$

$$f'(x)=-\frac{(x^2+2x+2)-(x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{x^2+4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f'(x)=0$ の解は $x=-2+\sqrt{2}$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになる。すると，$f(x)$ すなわち w の実部の最小値は，

x	-1	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘		↗	

$$f(-2+\sqrt{2})=1-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+(-2+\sqrt{2})^2}=1-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

［コメント］

複素数の計算と微分法の融合した標準的な問題です。