$\boxed{1}$　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，初項$a_1 = 6$で漸化式$a_{n+1} - a_n = 2n + 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たす。また，数列$\{b_n\}$を$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の第n項a_nを求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$の第$n+1$項b_{n+1}から第$2n$項b_{2n}までの和を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角錐 ABCD において，$AB=AC=AD=3$，$BC=CD=DB=2$ とする。また，辺 BC を $1:3$ に内分する点を E とする。このとき，三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

(1) 辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2) 三角形 ADE の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 自然数 n に対して，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) $z=\cos\dfrac{45^\circ}{2}+i\sin\dfrac{45^\circ}{2}$ とするとき，z^8 の値を求めよ。

また，$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7$ の実部を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $C: y=\left|2x-1\right|-x^2+2x+1$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　直線 $l: y=ax+b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの $a,\ b$ の値を求めよ。

(3)　(2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$a_1 = 6$，$a_{n+1} - a_n = 2n + 4$ より，

$$a_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+4) = 6 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 4(n-1) = n^2 + 3n + 2 \quad (n \geqq 2)$$

$n = 1$ をあてはめると，$a_1 = 1^2 + 3\cdot 1 + 2 = 6$ となり，定義と一致する。

以上より, $n \geqq 1$ で，$a_n = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

(2)　$b_n = \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ より，

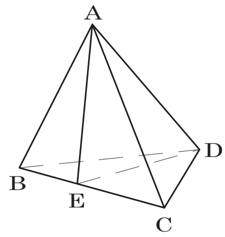
$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+2} = \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$$

［解 説］

教科書の例題に載っているような漸化式の基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC において，余弦定理より，$4=9+9-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{9+9-4}{2}=7$$

同様にして，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=7$

条件より，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$ なので，

$$|\overrightarrow{AE}|^2=\frac{1}{16}\left(9|\overrightarrow{AB}|^2+6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{16}(9\cdot 9+6\cdot 7+9)=\frac{33}{4}$$

よって，$\mathrm{AE}=\sqrt{\dfrac{33}{4}}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

また，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{4}(3\cdot 7+7)=7$

すると，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ より，同様にして，

$$|\overrightarrow{DE}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{33}{4}-2\cdot 7+9=\frac{13}{4}$$

よって，$\mathrm{DE}=\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

(2)　(1)より$\triangle$ADE の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-\left(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{4}\cdot 9-7^2}=\frac{\sqrt{101}}{4}$$

[解 説]

ベクトルで解こうか，三角比で解こうか，迷いました。(2)の設問を見て，前者に決めました。

3

問題のページへ

(1)　数学的帰納法を用いて，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ を証明する。

(i)　$n=1$ のとき　明らかに成り立つ。

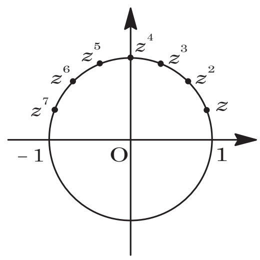
(ii)　$n=k$ のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ と仮定する。

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

(2)　$\dfrac{45^\circ}{2}=\theta$ とおくと，$z=\cos\theta+i\sin\theta$



$z^8=\cos 8\theta+i\sin 8\theta=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ=-1$

ここで，$w=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7$ とおくと，

$$w=\frac{z(1-z^7)}{1-z}=\frac{z-z^8}{1-z}=\frac{z+1}{1-z}=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{(1+\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

よって, w の実部は,

$$\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=0$$

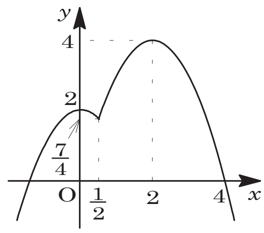
［解　説］

点 z，z^2，…，z^7 の配置が，虚軸に関して対称となっています。これから，w の実部は明らかに 0 としてはまずいでしょうか。

4

問題のページへ

(1) $C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$ に対して，



(i) $x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$y=2x-1-x^2+2x+1=-x^2+4x$

$$=-(x-2)^2+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii) $x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=-(2x-1)-x^2+2x+1$

$$=-x^2+2 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) ①より，$y'=-2x+4$

ここで，$t>\dfrac{1}{2}$ として，接点を $(t,\ -t^2+4t)$ とすると，接線の方程式は，

$$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t),\ y=(-2t+4)x+t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②と③の共有点は，$-x^2+2=(-2t+4)x+t^2$

$$x^2-2(t-2)x+t^2-2=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

接する場合は，$D/4=(t-2)^2-(t^2-2)=0$ から，$t=\dfrac{3}{2}$

このとき，④の重解は $x=t-2=-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ となり，題意に適する。

よって，求める接線 l は③より，$y=x+\dfrac{9}{4}$ となり，$a=1$，$b=\dfrac{9}{4}$

(3) $S=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{x+\frac{9}{4}-(-x^2+2)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{x+\frac{9}{4}-(-x^2+4x)\right\}dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

[解　説]

微積分の総合問題です。計算ミスに注意して完答しましょう。