**1**

解答解説のページへ

$x$を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式$f(x)=2$の解を求めよ。

(2)　不等式$f(x)\geqq 2$を満たす$x$の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

整数 $x,\ y$ が方程式 $x^2-3y^2=1$ ……①を満たすとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を①の整数解と呼ぶ。行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が①の整数解のとき，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も①の整数解であることを示せ。

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $a>0,\ b\geqq 0$ なる①の整数解とし，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。このとき，$c>0$, $d<b$ となることを示せ。また, $d<0$ ならば $b=0$ であることを示せ。

(4) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $a>0,\ b>0$ なる①の整数解のとき，ある自然数 $n$ に対して，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ。

**3**

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ について次の問いに答えよ。

(1) $t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を $t$ の式で表せ。

(2) $f(x)=0$ を満たす $x$ の値を求めよ。

(3) (2)で求めた $x$ に対して，$f'(x)$ の値を求めよ。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 $z$，$w$ の表す点をそれぞれ$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$とする。$z$ に対して $w$ を，O を始点とする半直線$\mathrm{OP}(z)$上に$\mathrm{Q}(w)$があり，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$w=\dfrac{2}{\overline{z}}$を示せ。

(2)　$\pm 2$，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点$\mathrm{P}(z)$が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w)=\mathrm{P}(z)$となる$z$を求めよ。

(3)　$\mathrm{P}(z)$が(2)の正方形の周上を動くとき，点$\mathrm{Q}(w)$の描く図形を求めて図示せよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2=(1+\log_2 x)^2-5\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}$

$$=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+1+\frac{3}{\log_2 x}$$

ここで，$\log_2 x=t$ とおくと，方程式 $f(x)=2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}=2$

$$t^3-3t^2-t+3=0\ (t\neq 0),\ (t-1)(t-3)(t+1)=0\ (t\neq 0)$$

よって，$t=\pm1,\ 3$ から，$\log_2 x=\pm1,\ 3$ なので，

$$x=2,\ \frac{1}{2},\ 8$$

(2)　(1)と同様にして，不等式 $f(x)\geqq 2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}\geqq 2$

$$t(t^3-3t^2-t+3)\geqq 0\ (t\neq 0),\ t(t-1)(t-3)(t+1)\geqq 0\ (t\neq 0)$$

よって，$t\leqq -1$，$0<t\leqq 1$，$3\leqq t$ から，$\log_2 x\leqq -1$，$0<\log_2 x\leqq 1$，$3\leqq \log_2 x$

$$0<x\leqq\frac{1}{2},\ 1<x\leqq 2,\ 8\leqq x$$

## ［解 説］

(2)は分数不等式と 4 次不等式の解法を問う問題です。現行課程のカリキュラム上の弱点をついた設問となっています。

**2**

問題のページへ

(1)　$A^{-1}=\dfrac{1}{4-3}\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$が$x^2-3y^2=1$……①の整数解のとき，$a^2-3b^2=1$……②

$$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-3b\\-a+2b\end{pmatrix}$$

これより, $a$, $b$ が整数のとき, $c$, $d$ も整数であり，②から,

$$c^2-3d^2=(2a-3b)^2-3(-a+2b)^2=a^2-3b^2=1$$

よって，$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$も①の整数解である。

(3)　(2)から$c=2a-3b$，$d=-a+2b$なので，②を用いると,

$$4a^2-9b^2=4a^2-3(a^2-1)=a^2+3>0$$

$a>0$, $b\geqq 0$ より, $2a>3b$ となり, $c>0$ である。

また，$b-d=b+a-2b=a-b$から，②を用いると,

$$a^2-b^2=3b^2+1-b^2=2b^2+1>0$$

$a>0$, $b\geqq 0$ より, $a>b$ となり, $d<b$ である。

さらに, $d<0$ のとき$-a+2b<0$，$2b<a$なので, $a>0$, $b\geqq 0$ より，②から,

$$a^2-(2b)^2=1+3b^2-4b^2=1-b^2>0$$

$-1<b<1$ となり, $b$ は整数なので，$b=0$である。

(4)　$\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$とおくと，$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=(A^{-1})^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}$が①の整数解より, (2)から帰納的に$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$も①の整数解となり,

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3)より，数列$\{b_n\}$は減少数列なので，$b_0>b_1>b_2>\cdots>b_n>b_{n+1}\cdots$となり，また正の整数$b_0$より小さい自然数は有限個より，ある$n$に対して$b_{n+1}<0$である。

このとき(3)より$b_n=0$，③より$a_n>0$なので，$a_n=1$となり,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(A^{-1})^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

［解 説］

有名な難問がまた出題されました。記憶をたどって調べていくと, 93 年の広大・後期の数学科, 88 年の京大・理系で出ています。

**3**

問題のページへ

(1)　$\cos x = t$ とすると，$\cos 3x = 4t^3 - 3t$，$\cos 2t = 2t^2 - 1$ なので，

$$f(x) = \cos 3x + \cos 2x + \cos x = 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1$$

(2)　$f(x) = 0$ より，$4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 = 0$，$(2t+1)(2t^2-1) = 0$，$t = -\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ より，$x = \frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$

(3)　$f'(x) = -3\sin 3x - 2\sin 2x - \sin x$ より，

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} - 2$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\cdot 0 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot(-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

(4)　(3)より $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$，$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0$，$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ なので，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}$ のとき $f(x) \geqq 0$，$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) \leqq 0$ となる。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の１つとすると，$F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x$

$$I = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\,dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{4}\right) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F(\pi) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -F(0) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2F\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F(\pi)$$

ここで，$F(0) = 0$，$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F(\pi) = 0$ より，

$$I = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

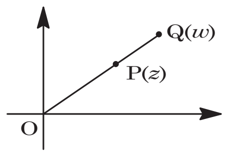
［解 説］

第１問と同じく，計算力主体の問題です。特に(4)は疲れます。

$\boxed{4}$　問題のページへ

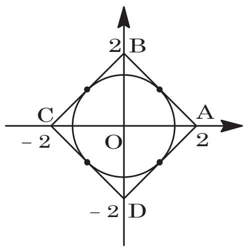
(1)　半直線OP$(z)$上に点Q$(w)$があるので, $k>0$ として $w=kz$ より，$|w|=k|z|$

条件より，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$ なので，$k|z|=\dfrac{2}{|z|}$，$k=\dfrac{2}{|z|^2}$




よって，$w=\dfrac{2}{|z|^2}z=\dfrac{2}{z\bar{z}}z=\dfrac{2}{\bar{z}}$

(2)　$w=z$ とすると, (1)より，$z=\dfrac{2}{|z|^2}z$




$z\neq 0$ より，$|z|^2=2$，$|z|=\sqrt{2}$

よって，点P$(z)$は原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円周上にあり，$\pm 2$，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形との共有点を求めると,

$$z=1\pm i,\ -1\pm i$$

(3)　まず, 点P$(z)$が線分AB上を動くとき,

$$|z|=|z-(2+2i)|\cdots\cdots\cdots①,\ |z|\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

(1)より，$w=\dfrac{2}{\bar{z}}$ なので，$\bar{z}=\dfrac{2}{w}\cdots\cdots\cdots③$

①より，$|\bar{z}|=|\overline{z-(2+2i)}|$，$|\bar{z}|=|\bar{z}-(2-2i)|$

③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right|=\left|\dfrac{2}{w}-(2-2i)\right|$，$\dfrac{2}{|w|}=\dfrac{2|1-(1-i)w|}{|w|}$

$$\left|(1-i)\left(w-\frac{1}{1-i}\right)\right|=1,\ \sqrt{2}\left|w-\frac{1+i}{2}\right|=1,\ \left|w-\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

②より$|\bar{z}|\leqq 2$ となり，③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right|\leqq 2$，$\dfrac{2}{|w|}\leqq 2$，$|w|\geqq 1\cdots\cdots\cdots⑤$

したがって，点P$(z)$が線分 AB 上を動くとき，点Q$(w)$は④と⑤を満たす曲線, すなわち点$\dfrac{1+i}{2}$を中心とし，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の円周上で，原点中心の単位円の外部または周上の部分を動く。

さて，点$z_1$が線分 AB 上を動くとき，$z_1$を原点のまわりに$\dfrac{1}{2}\pi$だけ回転した点を$z_2$，$z_1$を原点のまわりに$\pi$だけ回転した点を$z_3$，$z_1$を原点のまわりに$\dfrac{3}{2}\pi$だけ回転した点を$z_4$とすると,

$$z_2=iz_1,\ z_3=-z_1,\ z_4=-iz_1$$

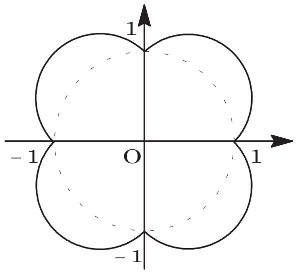
このとき点$z_2$は線分 BC 上，点$z_3$は線分 CD 上，点$z_4$は DA 上をそれぞれ動く。

ここで，$w_1=\dfrac{2}{\overline{z_1}}$ とおくと，点 $w_1$ は④と⑤を満たす曲線上を動く。

すると，$w_2=\dfrac{2}{\overline{z_2}}=\dfrac{2}{-i\overline{z_1}}=i\dfrac{2}{\overline{z_1}}=iw_1$，$w_3=\dfrac{2}{\overline{z_3}}=\dfrac{2}{-\overline{z_1}}=-w_1$

$$w_4=\dfrac{2}{\overline{z_4}}=\dfrac{2}{i\overline{z_1}}=-i\dfrac{2}{\overline{z_1}}=-iw_1$$

以上より，点 $w_2$，$w_3$，$w_4$ は，動点 $w_1$ を原点のまわりに $\dfrac{1}{2}\pi$，$\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ だけ回転した点となり，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は，まとめると右図の実線のようになる。




［解　説］

複素数平面上における軌跡の問題で，昨年，名市大・医に類題が出ています。そのとき考えたのと同じ方針で，上の解を作りました。