$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

n を自然数とする。$f(x)$は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$を通るとする。

(1)　2 次関数 $f(x)$を求めよ。

(2)　この関数 $f(x)$について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$の値を n を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x \leqq 1 \text{の場合})\\ x & (x>1 \text{の場合})\end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　実数 t に対して $F(t)$ を，$F(t)=\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ で定義するとき，関数 $F(t)$ の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面において，複素数$z = x + iy$（x，yは実数，iは虚数単位）が直線$y = 1$の上を動くとき，$\dfrac{1}{z^2}$が描く図形をCとする。

(1)　Cが実軸に関して対称であることを証明せよ。

(2)　C上の点に対応する複素数の絶対値をr，偏角をθとするとき，rをθで表せ。

4

解答解説のページへ

1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から, 1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし, 板の厚さは無視する。

(1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり, これを単位として切り出すとする。ただし, 平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき, 正四面体の体積が最大となるような x と, そのときの体積を求めよ。

(2) 図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり, 切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

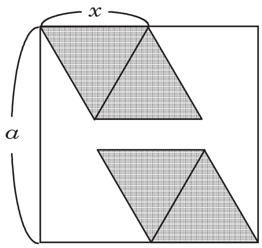


図1

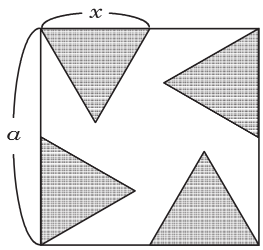


図2

1

問題のページへ

(1)　$f(0)=1$より，$f(x)=ax^2+bx+1$とおくと，

$f(-1)=0$から，$a-b+1=0$………①

$f(n)=n$から，$an^2+bn+1=n$………②

①より$b=a+1$，②に代入して$an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\ b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2)　(1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$

$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3)　$(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$と変形すると，$2n(n+2)$は偶数，さらに$n+1$，$n+2$のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$が 3 の倍数でないので，$n+2$が3の倍数となることである。

よって，S の値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$が 6 の倍数，すなわち$n+2$が3の倍数であることことが必要十分である。

［解 説］

(2)の結果から，(3)では$(n+2)(3n+1)$が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。nを偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

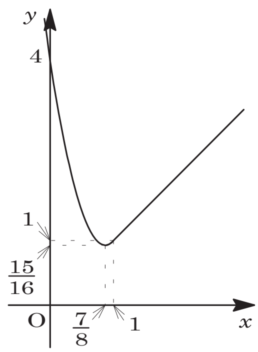
© 電送数学舎 2001

2

問題のページへ

(1)　$x \leqq 1$ のとき $f(x)=4x^2-7x+4=4\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{15}{16}$，

$x>1$のとき $f(x)=x$ より，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$F(t)$ は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，および $x=t$，$x=t+1$によって囲まれた領域の面積を表す。

(i)　$t \leqq 0$ のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}(4x^2-7x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}\{(t+1)^3-t^3\}-\frac{7}{2}\{(t+1)^2-t^2\}+4\{(t+1)-t\}$$
$$=4t^2-3t+\frac{11}{6}=4\left(t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{61}{48}$$

(ii)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_t^1(4x^2-7x+4)\,dx+\int_1^{t+1}x\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}(1-t^3)-\frac{7}{2}(1-t^2)+4(1-t)+\frac{1}{2}\{(t+1)^2-1\}$$
$$=-\frac{4}{3}t^3+4t^2-3t+\frac{11}{6}$$

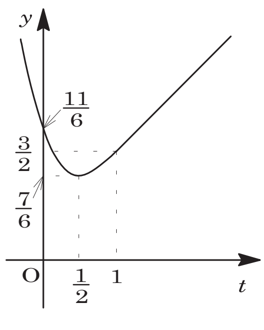
$F'(t)=-4t^2+8t-3=-(2t-1)(2t-3)$ より，$F(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$	$\frac{11}{6}$	↘	$\frac{7}{6}$	↗	$\frac{3}{2}$

(iii)　$t \geqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}=\frac{1}{2}\{(t+1)^2-t^2\}$$
$$=t+\frac{1}{2}$$

以上より，$y=F(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。また，$F(t)$ の最小値は $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$ である。



［解 説］

$F(t)$ を求めるのに場合分けが必要ですが，(1)の $y=f(x)$ のグラフを利用すれば難しくはありません。

© 電送数学舎 2001

3

問題のページへ

(1)　条件より，$z=t+i$，$w=\dfrac{1}{z^2}$ とおくと，

$$w=\frac{1}{(t+i)^2}=\frac{1}{(t^2-1)+2ti}=\frac{(t^2-1)-2ti}{(t^2-1)^2+4t^2}=\frac{(t^2-1)-2ti}{(t^2+1)^2}$$

ここで，$w=f(t)+g(t)i$ とおくと，$f(t)=\dfrac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$，$g(t)=\dfrac{-2t}{(t^2+1)^2}$ なので，

$$f(-t)=f(t),\ \ g(-t)=-g(t)$$

よって，w が描く図形 C は実軸に関して対称である。

(2)　条件より，$f(t)=r\cos\theta$，$g(t)=r\sin\theta$ なので，

$$r\cos\theta=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ r\sin\theta=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$r^2=\dfrac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^4}+\dfrac{4t^2}{(t^2+1)^4}=\dfrac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^4}=\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$ から，

$$r=\frac{1}{t^2+1},\ \ t^2=\frac{1}{r}-1\ \cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入して，$r\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{r}-2}{\frac{1}{r^2}}=r(1-2r)$

よって，$\cos\theta=1-2r$ より，$r=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

［解　説］

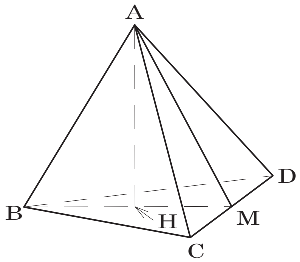
①と②から t を消去すると，r と θ の関係が導けます。このとき，まず $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の関係を用いて，t と r の関係式を導くところが，ちょっと難です。

© 電送数学舎 2001

4

問題のページへ

(1)　1 辺の長さが x の正四面体において，頂点 A から△BCD に下ろした垂線の足を H とすると，H は△BCD の重心となる。



ここで，辺 CD の中点を M とおくと，

$$\cos\angle\mathrm{AMH} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$$

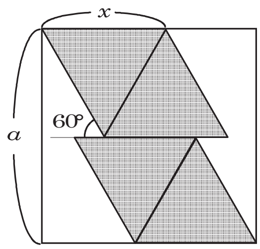
$$\sin\angle\mathrm{AMH} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

このとき，$\mathrm{BM} = \mathrm{AM} = x\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，$\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$

この正四面体の体積を V とすると，$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}x = \frac{\sqrt{2}}{12}x^3$

したがって, V が最大となるのは, x が最大となるときである。

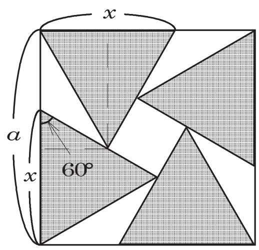
さて，題意のように正方形から 4 つの正三角形を切り出すとき，その 1 辺の長さが最大になるのは右図の場合である。



このとき，$x\sin 60^\circ = \frac{a}{2}$ より，$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ となり，

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{108}a^3$$

(2)　題意のように正方形から 4 つの正三角形を切り出すとき，その 1 辺の長さが最大になるのは右図の場合である。



このとき，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + x - a\right)\tan 60^\circ = \frac{x}{2}$

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{3}x - \sqrt{3}a = \frac{x}{2},\quad (1+\sqrt{3})x = \sqrt{3}a$$

よって，$x = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}a = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a$

［解 説］

正三角形の 1 辺の長さが最大なとき，正四面体の体積も最大です。そのため，題意を満たすなるべく大きな正三角形を切り出せばよいことになります。

© 電送数学舎 2001