1

解答解説のページへ

n を自然数とする。$f(x)$は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$を通るとする。

(1)　2 次関数 $f(x)$を求めよ。

(2)　この関数 $f(x)$について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$の値を n を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。

2

解答解説のページへ

原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

α を 0 でない複素数とし，その偏角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たすものとする。原点を O とする複素数平面において α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする。

(1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O，X，A，Y の順に結んでできる四角形において，$\angle$A を $\angle$O で表せ。

(2) 実数 t の表す点を T とする。α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数 t はどのような範囲にあるか。

4

解答解説のページへ

$f(t)$ を連続関数, x を実数として, 関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-x|\,dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき, 関数 $g(x)$ の増減を調べ, $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, $e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で, その逆関数も微分可能とし, $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき, $g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　$f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，

$f(-1)=0$ から，$a-b+1=0$ ………①

$f(n)=n$ から，$an^2+bn+1=n$ ………②

①より $b=a+1$，②に代入して $an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\ b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2)　(1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$ なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$
$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3)　$(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$ と変形すると，$2n(n+2)$ は偶数，さらに $n+1$，$n+2$ のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$ も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$ は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$ が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$ が 3 の倍数でないので，$n+2$ が 3 の倍数となることである。

よって，S の値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$ が 6 の倍数，すなわち $n+2$ が 3 の倍数であることことが必要十分である。

［解 説］

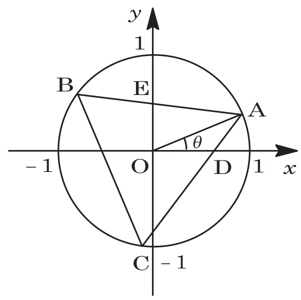
(2)の結果から，(3)では $(n+2)(3n+1)$ が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。n を偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

2

問題のページへ

正三角形 ABC に対して $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，対称性から $0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i)　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき



△OAD において，$\angle\mathrm{ADO} = \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{6}\pi - \theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)}$$

$$\mathrm{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

△OAE において，$\angle\mathrm{OEA} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{3}\pi + \theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)},\quad \mathrm{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

△ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\sin\theta + \frac{1}{2}\mathrm{OE}\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

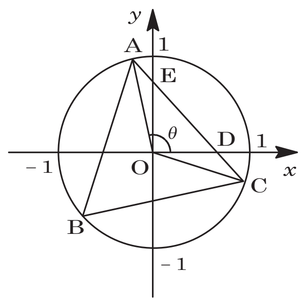
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}{\sqrt{3}\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta + 1}{2\sin 2\theta + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4(2\sin 2\theta + \sqrt{3})}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，$0 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ となる。

よって，$\sin 2\theta = 1$ のとき最大値 $S = \frac{\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin 2\theta = 0$ のとき最小値 $S = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。

(ii)　$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ のとき



△OCD において，$\angle\mathrm{ODC} = \pi - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) = \frac{\pi}{6} + \theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}$$

$$\mathrm{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

$\triangle$OAE において，$\angle\mathrm{OEA}=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{3}\pi-\theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\theta\right)},\quad \mathrm{OE}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{1}{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}$$

$\triangle$ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-4\sin\theta\cos\theta}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta}\\&=-\frac{1}{4\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より $\dfrac{4}{3}\pi\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ なので，$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって，$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき最小値 $S=\dfrac{1}{4}$ をとる。

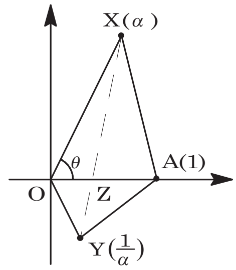
(i)(ii)より, S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが，意外に奥が深いという感じがします。

3

問題のページへ



(1)　$\arg\alpha=\theta$ より，$\arg\dfrac{1}{\alpha}=\arg 1-\arg\alpha=-\theta$

よって，$\angle \mathrm{YOX}=\theta-(-\theta)=2\theta$

$$\angle \mathrm{XAY}=\arg\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-1}{\alpha-1}=\arg\dfrac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-1)}=\arg\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\arg(-1)-\arg\alpha=\pi-\theta$$

以上より，$\angle \mathrm{XAY}=\pi-\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{YOX}$，$\angle \mathrm{A}=\pi-\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{O}$

(2)　$t<0$ のとき $T(t)$ は明らかに△OXY の外部にあるので，以下，$t\geqq 0$ の場合を考える。

まず，線分 XY と実軸との交点を $Z(z)$ とすると，(1)より，実軸は $\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線なので，

$$\mathrm{XZ}:\mathrm{ZY}=\mathrm{OX}:\mathrm{OY}=|\alpha|:\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|=|\alpha|^2:1$$

よって，$z=\dfrac{\alpha+|\alpha|^2\cdot\dfrac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2+1}=\dfrac{\alpha+\alpha\overline{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2+1}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{|\alpha|^2+1}$

ここで，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$z=\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1}$ となる。

さて $0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$0<z<\dfrac{2r}{r^2+1}=\dfrac{2}{r+\dfrac{1}{r}}$ であり，さらに $r>0$ から $r+\dfrac{1}{r}\geqq 2$（等号は $r=1$ のとき）なので，$0<z<1$ である。

以上より，$T(t)$ が△OXY の外部にある条件は，$t<0$ または $t\geqq 1$ である。

［解 説］

(2)の問題文「α によらず」という部分は，内容が曖昧です。ここでは，複素数平面の第 1 象限において，任意の位置に α があると解釈しました。

4

問題のページへ

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，$g(x)=\int_0^1 \left|e^t-x\right|dt$ となる。

(i)　$x<1$ のとき　$g(x)=\int_0^1(e^t-x)\,dt=\left[e^t-xt\right]_0^1=-x+e-1$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$1\leqq x\leqq e$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\log x}-(e^t-x)\,dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)\,dt=-\left[e^t-xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$
$$=-(x-1)+x\log x+(e-x)-x(1-\log x)=2x\log x-3x+e+1$$

$g'(x)=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}-3=2\log x-1$ となり，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$e-2$	↘		↗	1

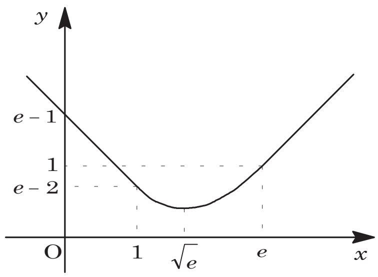
極小値は，$g(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2$ である。

(iii) $x>e$ のとき

$$g(x)=\int_0^1-(e^t-x)\,dt=x-e+1$$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　条件より $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，また $b=f(0)$，$c=f(1)$ とおく。すると，$f(t)$ は単調増加関数なので，$b<a<c$ となる。

さらに，$F'(t)=f(t)$ とおくと，

(i)　$x<b$ のとき　$g(x)=\int_0^1\{f(t)-x\}dt=\left[F(t)-xt\right]_0^1=F(1)-F(0)-x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$b\leqq x\leqq c$ のとき

$f(u)=x$，すなわち $u=f^{-1}(x)$ とおくと，

$$g(x)=\int_0^u-\{f(t)-x\}dt+\int_u^1\{f(t)-x\}dt=-\left[F(t)-xt\right]_0^u+\left[F(t)-xt\right]_u^1$$
$$=-2F(u)+2xu-x+F(0)+F(1)$$
$$g'(x)=-2F'(u)\frac{du}{dx}+2u+2x\frac{du}{dx}-1=-2f(u)\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$
$$=-2f\left(f^{-1}(x)\right)\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1=-2x\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$
$$=2u-1=2f^{-1}(x)-1$$

条件より $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ なので，$f^{-1}(a)=\frac{1}{2}$ である。

さて，$f(t)$ が単調増加関数なので，$f^{-1}(x)$ も単調増加関数となり，$g'(x)=0$ すなわち $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}$ の解は $x=a$ となる。

さらに $g'(x)$ の符号は，$x=a$ の前後で負から正に変わる。

すると，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	b	$\cdots$	a	$\cdots$	c
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii) $x>c$ のとき　$g(x)=\int_0^1 -\{f(t)-x\}dt=-F(1)+F(0)+x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$g(x)$ はすべての x に対して連続なので，$x=a$ で最小値をとる。

［解　説］

(2)は(1)を一般化したもので，同じように論理を展開することができます。しかし，逆関数の扱い方など，かなり難易度はアップします。