1

解答解説のページへ

k を自然数の定数とする。自然数 n に対して，$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-k|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 方程式 $z^4 = 8(1+\sqrt{3}i)$ の 4 つの解 z_1，z_2，z_3，z_4 を極形式で表せ。

(2) 複素数平面上の原点を O とし，複素数 $8(1+\sqrt{3}i)$，z_1，z_2，z_3，z_4 を表す点をそれぞれ Q，P_1，P_2，P_3，P_4 とする。このとき，4 つの三角形 OQP_1，OQP_2，OQP_3，OQP_4 の面積はすべて等しいことを示せ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ$(2,\ 0)$をPとし，他の 1 つをQとする。

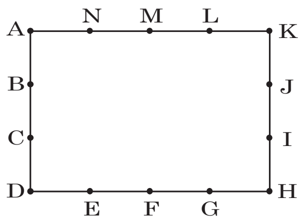
(1) 点Qの座標を求めよ。

(2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧PQとは，点Pと点Qを結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。

1

問題のページへ

(1)　$S_n=|n-1|+|n-2|+\cdots+|n-k|$に対して,

(i)　$k\leqq n$ のとき

$$S_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)=\frac{(n-1)+(n-k)}{2}\cdot k=kn-\frac{1}{2}k(k+1)$$

(ii)　$1\leqq n\leqq k$ のとき

$$S_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0+1+\cdots+(k-n)$$
$$=\frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1)+\frac{1+(k-n)}{2}\cdot(k-n)=n^2-(k+1)n+\frac{1}{2}(k^2+k)$$

(2)　$k\leqq n$ のとき, n の増加に伴ってS_nが増加するので, S_nが最小となるのは, $1\leqq n\leqq k$のときである。このとき, S_nはnの 2 次式なので,

$$S_n=\left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(k+1)^2+\frac{1}{2}(k^2+k)=\left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}$$

よって, n が奇数のとき, $n=\frac{k+1}{2}$ でS_nは最小値をとり, その値は$\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}$である。また, n が偶数のとき, $n=\frac{k}{2}$または$n=\frac{k}{2}+1$でS_nは最小値をとり, その値は$\frac{k^2}{4}-(k+1)\cdot\frac{k}{2}+\frac{1}{2}(k^2+k)=\frac{k^2}{4}$である。

［解 説］

正確に絶対値をはずすことがポイントです。わかりにくいときは, k の値を具体的に決めて, 見当をつけるのも 1 つの手です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0° \leqq \theta < 360°)$ とおくと，$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

また，$8(1+\sqrt{3}i) = 16(\cos 60° + i\sin 60°)$ となるので，$z^4 = 8(1+\sqrt{3}i)$ より，

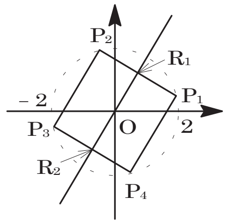
$$r^4 = 16,\ 4\theta = 60° + 360° \times n\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

よって，$r = 2$ で，$\theta = 15°,\ 105°,\ 195°,\ 285°$ となるので，

$$z_1 = 2(\cos 15° + i\sin 15°),\ z_2 = 2(\cos 105° + i\sin 105°)$$

$$z_3 = 2(\cos 195° + i\sin 195°),\ z_4 = 2(\cos 285° + i\sin 285°)$$

(2) (1)より，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ は対角線の交点が原点である正方形となる。



また，$\dfrac{\arg z_1 + \arg z_2}{2} = \dfrac{15° + 105°}{2} = 60°$ より，

$$\frac{\arg z_1 + \arg z_2}{2} = \arg 8(1+\sqrt{3}i)$$

よって，直線 OQ と線分 P_1P_2 との交点 R_1 は，P_1P_2 の中点である。同様にして，直線 OQ と線分 P_3P_4 との交点 R_2 は，P_3P_4 の中点である。

以上より，$R_1P_1 = R_1P_2 = R_2P_3 = R_2P_4$ となるので，

$$\triangle OQP_1 = \triangle OQP_2 = \triangle OQP_3 = \triangle OQP_4$$

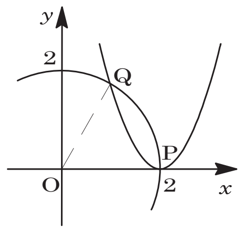
[解　説]

(2)の結論は，(1)の結果を複素数平面上に図示すれば明らかです。そのため，かえって記述が難しく感じられます。

3

問題のページへ

(1) 円 $C: x^2+y^2=4$ ……①，放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ ……②の交点は，①②より，



$$x^2+3(x-2)^4-4=0,\ (x+2)(x-2)+3(x-2)^4=0$$
$$(x-2)\{(x+2)+3(x^3-6x^2+12x-8)\}=0$$
$$(x-2)(x-1)(3x^2-15x+22)=0$$

$x\neq 2$ より $x=1$，②より $y=\sqrt{3}$ となり，$\mathrm{Q}(1,\ \sqrt{3})$ である。

(2) $\angle\mathrm{QOP}=60^\circ$ より，求める図形の面積を S とすると，

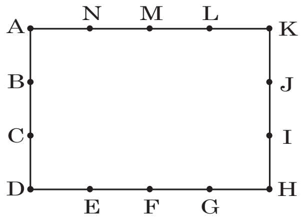
$$S=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\int_1^2\sqrt{3}(x-2)^2\,dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{5}{6}\sqrt{3}$$

［解 説］

積分の基本題です。これは落とせません。

4

問題のページへ



(1) A から N までの中から 3 点を選ぶ組合せは ${}_{14}C_3 = 364$ 通りである。

この中で三角形ができないのは，同一辺上の 3 点を選んだときである。まず，3 点が辺 AK または DH 上にあるときは ${}_5C_3 \times 2 = 20$ 通り，また 3 点が辺 AD または KH 上にあるときは ${}_4C_3 \times 2 = 8$ 通りである。

したがって，三角形は $364 - 20 - 8 = 336$ 個できる。

(2) 対称性から，二等辺三角形の頂点が, A, B, N, M の場合を考える。

(i) A が頂点の場合　△ABN，△ACM，△ADL の 3 通り

D, H, K が頂点の場合も，同様に 3 通りずつである。

(ii) B が頂点の場合　△BME，△BKI の 2 通り

C, I, J が頂点の場合も，同様に 2 通りずつである。

(iii) N が頂点の場合　△NDJ，△NDF，△NEK，△NFJ，△NGI の 5 通り

E, G, L が頂点の場合も，同様に 5 通りずつである。

(iv) M が頂点の場合　△MBJ，△MCI，△MDH，△MEG の 4 通り

F が頂点の場合も，同様に 4 通りである。

(i)〜(iv)より，正三角形となる場合はないので，二等辺三角形の個数は，

$$3 \times 4 + 2 \times 4 + 5 \times 4 + 4 \times 2 = 48$$

［解 説］

(1)は頻出題ですが, (2)は注意力がすべてです。