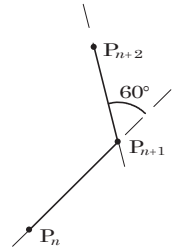


1

解答解説のページへ

複素数平面上で次のように点の列 P_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) をつくる。
 点 P_0, P_1 はそれぞれ $0, 1$ を表し、線分 $P_{n+1}P_{n+2}$ の長さは線分 P_nP_{n+1} の長さの r 倍 ($r > 0$) で直線 P_nP_{n+1} から直線 $P_{n+1}P_{n+2}$ へ図のようには
 かった角は 60° である。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) P_3 を求めよ。
- (2) P_{6n} を表す複素数 $a + bi$ の実部 a と虚部 b を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c, d を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に関して、次の問いに答えよ。

- (1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。
- (2) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たす A を a, b を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に点 $A(0, 2)$ と点 $B(1, 0)$ があり、線分 AB 上の点 P から x 軸, y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。点 P が A から B まで動くとき、線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき, 不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $x > 0$ のとき, 不等式 $\log(1 + x) > 1 - e^{-x}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 実数 x, y が $0 \leq x \leq e^y - 1$, $0 \leq y \leq 1 - e^{-x}$ を満たせば, $x = y = 0$ でなければならぬことを示せ。

1

問題のページへ

(1) $P_n(z_n)$ とし, $\alpha = r(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ とおくと, 条件より,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $w_n = z_{n+1} - z_n$ とおくと, $\textcircled{1}$ より, $w_{n+1} = \alpha w_n$

$$w_n = w_0 \alpha^n = (z_1 - z_0) \alpha^n = \alpha^n$$

よって, $z_{n+1} - z_n = \alpha^n \cdots \cdots \textcircled{2}$ すると, $z_3 - z_2 = \alpha^2$, $z_2 - z_1 = \alpha$, $z_1 - z_0 = 1$ より,

$$\begin{aligned} z_3 &= z_0 + (\alpha^2 + \alpha + 1) = r^2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) + r(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2i + \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri + 1 = 1 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(r + r^2)i \end{aligned}$$

(2) $\textcircled{2}$ より, $z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$ ($n \geq 1$) となるので,

$$\begin{aligned} z_{6n} &= \frac{1 - \alpha^{6n}}{1 - \alpha} = \frac{1 - r^{6n} \{ \cos(60^\circ \times 6n) + i \sin(60^\circ \times 6n) \}}{1 - r(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)} \\ &= \frac{1 - r^{6n}}{1 - \frac{1}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}ri} = \frac{(1 - r^{6n}) \left(1 - \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}r \right)^2 + \frac{3}{4}r^2} = \frac{(1 - r^{6n})(2 - r + \sqrt{3}ri)}{2(1 - r + r^2)} \end{aligned}$$

$$z_n = a + bi \text{ より, } a = \frac{(2 - r)(1 - r^{6n})}{2(1 - r + r^2)}, \quad b = \frac{\sqrt{3}r(1 - r^{6n})}{2(1 - r + r^2)}$$

[解説]

複素数平面上での点の回転を題材にした超頻出問題です。

2

問題のページへ

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{のとき, } A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

条件より, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ なので,

$$a^2 + bc = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b(a+d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c(a+d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad bc + d^2 = -2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{4} \text{より, } a^2 - d^2 = 1, \quad (a+d)(a-d) = 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{5}$ より, $a+d \neq 0$ なので, $\textcircled{2}$ より $b=0$, $\textcircled{3}$ より $c=0$

このとき, $\textcircled{1}$ は $a^2 = -1$ となり, これを満たす実数 a は存在しない。

したがって, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しない。

$$(2) \text{条件より, } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{なので,}$$

$$a^2 + bc = -1 \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad b(a+d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$c(a+d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{8}, \quad bc + d^2 = -1 \cdots \cdots \textcircled{9}$$

(i) $a+d \neq 0$ のとき

$\textcircled{7}$ より $b=0$, $\textcircled{8}$ より $c=0$

このとき, $\textcircled{6}$ は $a^2 = -1$ となり, 成立しない。

(ii) $a+d=0$ のとき

$d=-a$ より, $\textcircled{6}$ と $\textcircled{9}$ は一致する。また, $\textcircled{7}$ と $\textcircled{8}$ は成立する。

ここで $b=0$ とすると, $\textcircled{6}$ は $a^2 = -1$ となり, 成立しない。

よって, $b \neq 0$ なので, $\textcircled{6}$ より $c = \frac{-a^2 - 1}{b}$

$$\text{以上まとめて, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2+1}{b} & -a \end{pmatrix}$$

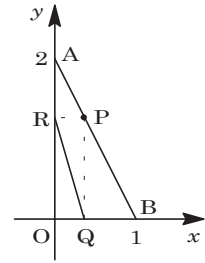
[解説]

行列の成分についての連立方程式を解きます。明解に解くには、経験が必要です。

3

問題のページへ

直線 AB の方程式は、 $y = -2x + 2$ より、 $P(t, -2t + 2)$ とおく。
 ただし、 $0 \leq t \leq 1$ である。このとき、 $Q(t, 0)$ 、 $R(0, -2t + 2)$
 となる。



さて、 $\vec{RQ} = (t, 2t - 2)$ より、直線 RQ は法線ベクトルを
 $(2t - 2, -t)$ とすることができ、その方程式は、

$$(2t - 2)(x - t) - ty = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$0 \leq t \leq 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ が通過する領域は、 $\textcircled{1}$ を t に関する方程式
 としてみたとき、 $0 \leq t \leq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ (x, y) の条件として求
 められる。

$$\textcircled{1} \text{ より、} 2t^2 - (2x - y + 2)t + 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の左辺を } f(t) \text{ とおくと、} f(0) = 2x, f(1) = 2 - 2x + y - 2 + 2x = y$$

ここで、線分 QR の通過領域は $\triangle OAB$ の内部または周上なので、

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって、 $f(0) \geq 0, f(1) \geq 0$ となる。

そこで、 $f(t) = 2\left(t - \frac{2x - y + 2}{4}\right)^2 - \frac{(2x - y + 2)^2}{8} + 2x$ から、求める条件は、

$$0 \leq \frac{2x - y + 2}{4} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{4}, -\frac{(2x - y + 2)^2}{8} + 2x \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{ より、} 0 \leq 2x - y + 2 \leq 4, 2x - 2 \leq y \leq 2x + 2 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} \text{ より、} (2x - y + 2)^2 - 16x \geq 0, (2x - y + 2 + 4\sqrt{x})(2x - y + 2 - 4\sqrt{x}) \geq 0$$

$$\textcircled{6} \text{ より } 2x - y + 2 + 4\sqrt{x} \geq 0 \text{ なので、} 2x - y + 2 - 4\sqrt{x} \geq 0$$

$$y \leq 2x - 4\sqrt{x} + 2 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

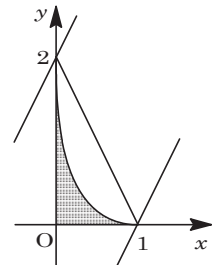
ここで、 $\textcircled{7}$ の境界線 $y = 2x - 4\sqrt{x} + 2$ に対して、

$$y' = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$$

x	0	⋯	1
y'	×	—	0
y	2	↘	0

以上より、 $\textcircled{3}\textcircled{6}\textcircled{7}$ を満たす領域は、右図の網点部になるので、こ
 の面積を S とすると、



$$S = \int_0^1 (2x - 4\sqrt{x} + 2) dx = \left[x^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

[解説]

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

4

- (1) $f(x) = e^x - 1 - x$ とおくと, $f'(x) = e^x - 1$
 $x > 0$ のとき, $f'(x) > 0$ より, $f(x) > f(0) = 0$
よって, $e^x > 1 + x$ ($x > 0$)

- (2) $g(x) = \log(1+x) - 1 + e^{-x}$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - e^{-x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - (1+x)}{(1+x)e^x}$$

$x > 0$ のとき, (1)より $g'(x) > 0$ なので, $g(x) > g(0) = 0$
よって, $\log(1+x) > 1 - e^{-x}$ ($x > 0$)

- (3) 条件より, $0 \leq x \leq e^y - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $0 \leq y \leq 1 - e^{-x} \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ から, $e^y \geq x + 1$, $y \geq \log(x + 1) \cdots \cdots \textcircled{3}$

ここで, $x > 0$ のとき, (2)より $\log(1+x) > 1 - e^{-x} \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より, $y > 1 - e^{-x}$ となるが, このとき $\textcircled{2}$ は成立しない。

よって, $\textcircled{1}$ より $x = 0$ である。

すると, $\textcircled{2}$ は $0 \leq y \leq 1 - e^0 = 0$ となり, $y = 0$ となる。

以上より, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を満たすのは, $x = y = 0$ だけである。

[解説]

(3)では, まず $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の領域を図示して, その共通部分が原点のみということを示しました。しかし, これでは(2)の誘導の意味が不明ですので, 考え直したのが上の解です。