1

解答解説のページへ

r, s, t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件 $ra_{n+1}+sa_n+t=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとし，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。

(1)　数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2)　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_2<a_3$，$a_4=13+3\sqrt{3}$ であるとき，一般項 a_n を求めよ。

(3)　(2)の条件の下で，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上の点z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を以下のように定める。$z_1=1$とする。次にさいころを振り，出た目が

(a)　1 または 2 のとき，$z_{n+1}=z_n+(1+i)$

(b)　3 以上のとき，$z_{n+1}=z_n(1+i)$

とし，この操作を$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$の順にくり返す。初めて$|z_n|\geqq 3$となるような番号nをNとする。ただし，iは虚数単位とする。

(1)　Nのとりうる値を求めよ。

(2)　Nの期待値を求めよ。

4

解答解説のページへ

曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2) l と m が直交するように点 A, B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$ra_{n+1}+sa_n+t=0$ ……①より，$ra_{n+2}+sa_{n+1}+t=0$ ……②となり，②－①から，

$$r(a_{n+2}-a_{n+1})+s(a_{n+1}-a_n)=0$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，$rb_{n+1}+sb_n=0$，$b_{n+1}=-\dfrac{s}{r}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $-\dfrac{s}{r}$ の等比数列である。

(2)　$b_1=a_2-a_1=3$ であり，$-\dfrac{s}{r}=q$ とおくと, (1)より $b_n=3q^{n-1}$

$a_2<a_3$ より $b_2>0$ なので, $3q>0$ すなわち $q>0$ である。

このとき，$a_4=a_1+b_1+b_2+b_3=1+3+3q+3q^2=4+3q+3q^2$ となり，

$$4+3q+3q^2=13+3\sqrt{3},\ q^2+q-(3+\sqrt{3})=0,\ (q-\sqrt{3})(q+\sqrt{3}+1)=0$$

$q>0$ より，$q=\sqrt{3}$

よって, $n\geqq 2$ で，$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3(\sqrt{3})^{k-1}=1+3\cdot\frac{(\sqrt{3})^{n-1}-1}{\sqrt{3}-1}$

$$=1+\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)\{(\sqrt{3})^{n-1}-1\}\cdots\cdots\cdots③$$

なお, ③は $n=1$ のときも成立している。

(3)　(2)より，$\log_3 b_k=\log_3 3(\sqrt{3})^{k-1}=\log_3(\sqrt{3})^{k+1}=\log_3 3^{\frac{k+1}{2}}=\dfrac{k+1}{2}$ となるので，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=4\cdot\frac{n}{2(n+2)}=\frac{2n}{n+2}$$

［解 説］

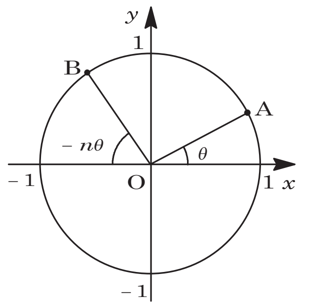
隣接 2 項間型の漸化式が題材ですが，スムーズに解けるように誘導がついています。

2

問題のページへ

(1)　A と B が 1 回目に出会う条件は$\theta=\pi-n\theta$，2 回目に出会う条件は$\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり，同様に考えると，k 回目に出会う条件は$\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$，すなわち

$2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。



ここで，$0<\theta\leqq 2\pi$ より，

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から，$-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$，$\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より, A と B は$n+1$回出会う。

(2)　A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$なので，①より，

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって, $n\geqq 2$ から, n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

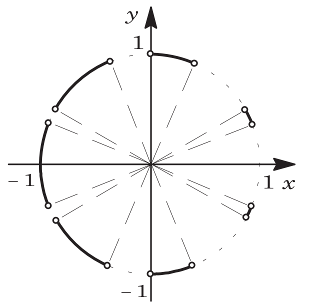
(3)　$0<\theta\leqq 2\pi$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ, 条件より，$\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\cos 4\theta=0$ の解は，$\theta=\dfrac{1}{8}\pi,\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{9}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{13}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$，$\cos 3\theta=0$ の解は，$\theta=\dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ である。

さて，$\theta=2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は,

$$\frac{1}{8}\pi<\theta<\frac{1}{6}\pi,\ \ \frac{3}{8}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi,\ \ \frac{5}{8}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{7}{8}\pi<\theta<\frac{9}{8}\pi,\ \ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{8}\pi,\ \ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{13}{8}\pi$$
$$\frac{11}{6}\pi<\theta<\frac{15}{8}\pi$$



以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。

[解　説]

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。弧度法が未習の受験生は，$\pi=180°$ と読み替えてください。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$|z_n| \geqq 3$ となるまで，操作(a)(b)に従って点 z_n を定めていくと下のようになる。

これより，初めて $|z_n| \geqq 3$ となるのは z_3，z_4，z_5 なので，$N = 3,\ 4,\ 5$ である。

$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(a)}} z_2 = 2 + i \xrightarrow{\text{(a)}} z_3 = 3 + 2i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(a)}} z_2 = 2 + i \xrightarrow{\text{(b)}} z_3 = 1 + 3i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(b)}} z_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{(a)}} z_3 = 2 + 2i \xrightarrow{\text{(a)}} z_4 = 3 + 3i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(b)}} z_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{(a)}} z_3 = 2 + 2i \xrightarrow{\text{(b)}} z_4 = 4i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(b)}} z_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{(b)}} z_3 = 2i \xrightarrow{\text{(a)}} z_4 = 1 + 3i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(b)}} z_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{(b)}} z_3 = 2i \xrightarrow{\text{(b)}} z_4 = -2 + 2i \xrightarrow{\text{(a)}} z_5 = -1 + 3i$$
$$z_1 = 1 \xrightarrow{\text{(b)}} z_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{(b)}} z_3 = 2i \xrightarrow{\text{(b)}} z_4 = -2 + 2i \xrightarrow{\text{(b)}} z_5 = -4$$

(2)　操作(a)の確率は $\dfrac{1}{3}$，操作(b)の確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

(1)より，$N = 3$ の確率は，$\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

$N = 4$ の確率は，$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{27}$

$N = 5$ の確率は，$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{8}{27}$

よって, N の期待値は，$3 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{10}{27} + 5 \times \dfrac{8}{27} = \dfrac{107}{27}$ である。

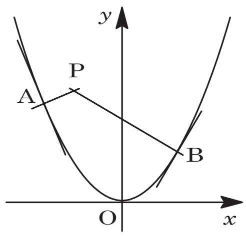
［解 説］

題意が読みとれると，完答できる基本的な問題です。なお，上の解では省略しましたが，図を書きながら計算を進めました。

4

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線の方向ベクトル $(1,\ 2a)$ が，法線 l の法線ベクトルとなるので，l の方程式は，



$$x-a+2a(y-a^2)=0,\quad x+2ay=a+2a^3\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，法線 m の方程式は，

$$x+2by=b+2b^3\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2(a-b)y=a-b+2(a^3-b^3)$

$$y=\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2,\quad x=a+2a^3-2a\left(\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)=-2ab(a+b)$$

よって，$\mathrm{P}\left(-2ab(a+b),\ \dfrac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)$となる。

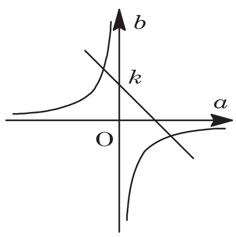
(2)　l と m が直交するとき, l と m の法線ベクトルどうしも直交するので,

$$1+2a\cdot 2b=0,\quad ab=-\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，③を代入して，

$$x=\frac{1}{2}(a+b)\cdots\cdots\cdots④,\quad y=\frac{1}{2}+(a+b)^2-ab=(a+b)^2+\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$a+b=k\cdots\cdots⑥$とおくと，ab 平面上で，どんな k に対しても③と⑥は共有点をもつ。すなわち $a+b$ は任意の値をとり，④より $a+b=2x$ を⑤に代入すると，点 P の軌跡の方程式は，$y=4x^2+\dfrac{3}{4}\cdots\cdots$⑦となる。



(3)　⑦より $y'=8x$ なので，⑦上の接点を$\left(t,\ 4t^2+\dfrac{3}{4}\right)$とおくと，

接線の方程式は，

$$y-\left(4t^2+\frac{3}{4}\right)=8t(x-t),\quad y=8tx-4t^2+\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

$y=x^2$ と⑧の交点は，$x^2-8tx+4t^2-\dfrac{3}{4}=0$，$x=4t\pm\sqrt{12t^2+\dfrac{3}{4}}$

これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$y=x^2$ と⑧で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(8tx-4t^2+\frac{3}{4}-x^2\right)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{12t^2+\frac{3}{4}}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最小値$\dfrac{1}{6}\left(2\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$をとる。

［解　説］

微積分の総合問題で，しかも超頻出のものです。