1

解答解説のページへ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ をとるとする。

(1)　$a,\ b,\ c$ を $r,\ s,\ t$ の式で表せ。

(2)　すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

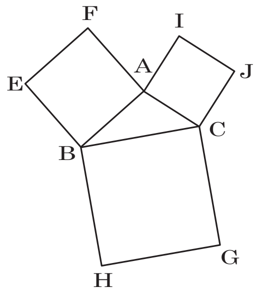
(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2)　A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ



複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 ABEF，BCGH，CAIJ を作る。

(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数 α，β，γ で表されているとき，点 F, H, J を α，β，γ の式で表せ。

(2)　3 つの正方形 ABEF，BCGH，CAIJ の中心をそれぞれ P，Q，R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく，AQ ⊥ PR であることを証明せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$1<a<b$ とする。原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$を通る直線，および曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ で囲まれた部分を R とする。R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1) E を a と b の式で表せ。

(2) $c>1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$から直線 $y=-x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ。

(3) V を a と b の式で表せ。

(4) $b=a+1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V$ を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ に対して，$f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ より，

$$a+b+c=r\cdots\cdots①,\ -a+b-c=s\cdots\cdots②,\ -8a+4b-2c=t\cdots\cdots③$$

①②より，$2b=r+s$，$b=\dfrac{r+s}{2}\cdots\cdots\cdots④$

①③より $-6a+6b=2r+t$ となり，④を代入して，

$$6a=6\cdot\frac{r+s}{2}-2r-t=r+3s-t,\ a=\frac{r+3s-t}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

①に④⑤を代入すると，$c=r-\dfrac{r+3s-t}{6}-\dfrac{r+s}{2}=\dfrac{2r-6s+t}{6}$

(2)　(1)より，
$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{r+3s-t}{6}n^3+\frac{r+s}{2}n^2+\frac{2r-6s+t}{6}n\\&=\frac{r}{6}(n^3+3n^2+2n)+\frac{s}{2}(n^3+n^2-2n)-\frac{t}{6}(n^3-n)\\&=\frac{r}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{s}{2}(n-1)n(n+2)-\frac{t}{6}(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

ここで，$n(n+1)(n+2)$ および $(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数となる。また，$(n-1)n$ は連続 2 整数の積なので 2 の倍数である。

よって，すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になる。

［解 説］

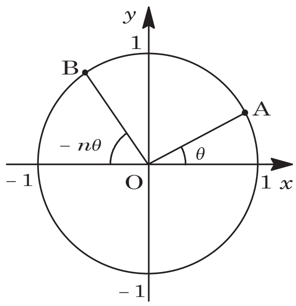
(1)の誘導に従うと，(2)の結論までストレートに進むことができます。整数を題材にした頻出問題の 1 つです。

2

問題のページへ

(1)　A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$，2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり，同様に考えると，k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$，すなわち

$2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。



ここで，$0<\theta\leqq 2\pi$ より，

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から，$-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$，$\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より, A と B は $n+1$ 回出会う。

(2)　A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので，①より，

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって, $n\geqq 2$ から, n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3)　$0<\theta\leqq 2\pi$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ, 条件より，$\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\cos 4\theta=0$ の解は，$\theta=\dfrac{1}{8}\pi,\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{9}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{13}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$，

$\cos 3\theta=0$ の解は，$\theta=\dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ である。

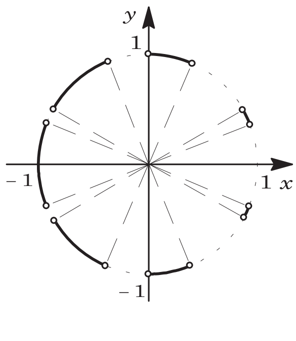
さて，$\theta=2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は，

$$\frac{1}{8}\pi<\theta<\frac{1}{6}\pi,\ \ \frac{3}{8}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi,\ \ \frac{5}{8}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{8}\pi<\theta<\frac{9}{8}\pi,\ \ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{8}\pi,\ \ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{13}{8}\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi<\theta<\frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。

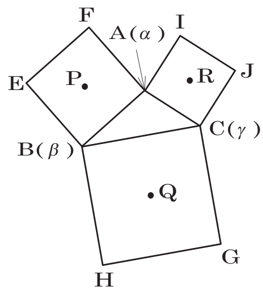


［解 説］

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

3

問題のページへ



(1)　点 F, H, J を表す複素数をそれぞれz_1，z_2，z_3とおく。

条件より，A を中心として B を$-90°$回転すると F に一致するので，

$$z_1-\alpha=-i(\beta-\alpha)，\ z_1=(1+i)\alpha-i\beta$$

同様に，B を中心として C を$-90°$回転すると H に一致し，C を中心として A を$-90°$回転すると J に一致するので，

$$z_2-\beta=-i(\gamma-\beta)，\ z_2=(1+i)\beta-i\gamma$$

$$z_3-\gamma=-i(\alpha-\gamma)，\ z_3=(1+i)\gamma-i\alpha$$

(2)　点 P, Q, R を表す複素数をそれぞれw_1，w_2，w_3とおく。

まず, 2 点 B, F の中点が P より，$w_1=\dfrac{\beta+z_1}{2}=\dfrac{(1+i)\alpha+(1-i)\beta}{2}$

2 点 C, H の中点が Q より，$w_2=\dfrac{\gamma+z_2}{2}=\dfrac{(1+i)\beta+(1-i)\gamma}{2}$

2 点 A, J の中点が R より，$w_3=\dfrac{\alpha+z_3}{2}=\dfrac{(1+i)\gamma+(1-i)\alpha}{2}$

ここで，$w_2-\alpha=\dfrac{-2\alpha+(1+i)\beta+(1-i)\gamma}{2}$

$$w_3-w_1=\frac{-2i\alpha-(1-i)\beta+(1+i)\gamma}{2}=\frac{-2i\alpha+i(1+i)\beta+i(1-i)\gamma}{2}$$

すると，$w_3-w_1=i(w_2-\alpha)$となるので，$\dfrac{w_3-w_1}{w_2-\alpha}=i$から，

$$\frac{|w_3-w_1|}{|w_2-\alpha|}=1，\ \arg\frac{w_3-w_1}{w_2-\alpha}=90°$$

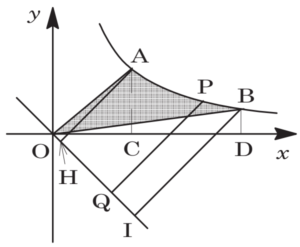
したがって，AQ = PR，AQ ⊥ PR である。

［解　説］

複素数の特徴を活かすことのできる証明問題です。有名な問題なので，参考書などには類題が載っています。

4

問題のページへ



(1)　C$(a,\ 0)$，D$(b,\ 0)$とおくと，

$$E=\triangle\mathrm{OAC}+\int_a^b\frac{1}{x}dx-\triangle\mathrm{OBD}$$
$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{a}+\left[\log x\right]_a^b-\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{b}$$
$$=\log b-\log a=\log\frac{b}{a}$$

(2)　点P$\left(c,\ \frac{1}{c}\right)$と直線$x+y=0$との距離が$t$なので，

$$t=\frac{\left|c+\frac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}},\ \ \sqrt{2}t=c+\frac{1}{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{OP}=\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$から，三平方の定理より，$s^2+t^2=c^2+\frac{1}{c^2}\cdots\cdots\cdots②$

②より，$s^2+t^2=\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-2$

①を代入して，$s^2+t^2=2t^2-2$，$t^2=s^2+2\cdots\cdots\cdots③$

(3)　点 A, B から直線$y=-x$に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とすると，①より
$\mathrm{AH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+\frac{1}{a}\right)$となるので，③から$s^2=t^2-2$として，

$$\mathrm{OH}^2=\mathrm{AH}^2-2=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\frac{1}{2}\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$a>1$より，$\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

同様にして，$\mathrm{BI}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b+\frac{1}{b}\right)$，$\mathrm{OI}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)$

そこで，$\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\alpha$，$\mathrm{OI}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)=\beta$ とおき，③を用いると，
$\mathrm{AH}^2=\alpha^2+2$，$\mathrm{BI}^2=\beta^2+2$となるので，

$$V=\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{AH}^2\cdot\mathrm{OH}+\int_\alpha^\beta\pi t^2ds-\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{BI}^2\cdot\mathrm{OI}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(\alpha^2+2)\alpha+\int_\alpha^\beta\pi(s^2+2)ds-\frac{1}{3}\pi(\beta^2+2)\beta$$
$$=\frac{1}{3}\pi(\alpha^3+2\alpha)+\pi\left[\frac{1}{3}s^3+2s\right]_\alpha^\beta-\frac{1}{3}\pi(\beta^3+2\beta)$$
$$=\frac{1}{3}\pi(\alpha^3+2\alpha)+\frac{1}{3}\pi(\beta^3-\alpha^3)+2\pi(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}\pi(\beta^3+2\beta)$$
$$=\frac{2}{3}\pi\alpha+2\pi\beta-2\pi\alpha-\frac{2}{3}\pi\beta=\frac{4}{3}\pi(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}-a+\frac{1}{a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(b-a-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

(4)　$b=a+1$のとき，$E=\log\dfrac{a+1}{a}=\log\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$より，

$$\lim_{a\to\infty}E=\lim_{a\to\infty}\log\left(a+\frac{1}{a}\right)=0$$

また，$V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(a+1-a-\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(1-\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a}\right)$より，

$$\lim_{a\to\infty}V=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

［解 説］

例年，どこかの大学で出題されている斜回転体の体積を求める問題です。誘導が非常に細かくつけられています。