1

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　QR : RP = AP : PB であることを示せ。

2

解答解説のページへ

定数 a は，$0<a<1$ を満たすものとする。空間に，次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は，

(ア)　同一グループ内の 2 点となる場合

(イ)　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　(ア), (イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また，そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，位置ベクトルは原点 O を基準とする。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を$a_n = n^2 + 1$で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n = 3n^2 + 3$で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を$\{c_n\}$とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1 = 2$，$c_2 = 5$，$c_3 = 6$となっている。このうち，$\{a_n\}$から来る項は$c_1 = a_1$，$c_2 = a_2$，$\{b_n\}$から来る項は$c_3 = b_1$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　c_4，c_5，c_6を求めよ。

(2)　$n = 3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（kは自然数）の場合に分けて考えることにより，a_nは 3 の倍数ではなく，したがってa_nは$\{b_n\}$のどの項とも一致しないことを示せ。

(3)　$\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。

4

解答解説のページへ

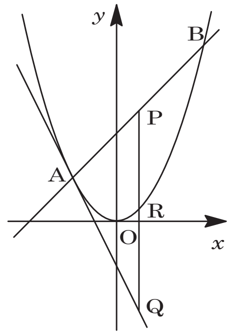
zを 0 でない複素数とする。

(1) z の絶対値を r, 偏角をθ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$とするとき, $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$が実数となるような$r$と$\theta$を求めよ。

(2) $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$が実数で, その値が 0 以上 4 以下であるような点zはどのような図形を描くか。複素数平面上に図示せよ。

1

問題のページへ



(1)　$y = x^2$ より $y' = 2x$ なので，$x = -1$ のとき $y' = -2$

これより，$\mathrm{A}(-1,\ 1)$ における接線 l の方程式は,

$l : y - 1 = -2(x + 1)$，$y = -2x - 1$

(2)　直線 $\mathrm{AB} : y - 1 = \dfrac{4-1}{2+1}(x+1)$，$y = x + 2$

$\mathrm{P}(t,\ t+2)\ (-1 < t < 2)$ とおくと,

$\mathrm{R}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ -2t-1)$

すると，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = (t+1) : (2-t)$

$$\begin{aligned}\mathrm{QR} : \mathrm{RP} &= \{t^2 - (-2t-1)\} : \{(t+2) - t^2\} \\ &= (t^2 + 2t + 1) : (-t^2 + t + 2) = (t+1)^2 : (t+1)(2-t) \\ &= (t+1) : (2-t)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{QR} : \mathrm{RP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}$

［解　説］

放物線と直線について，基本確認のための問題です。

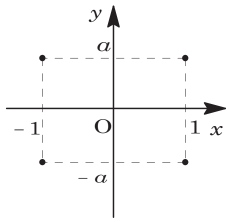
2

問題のページへ

(1)　(ア)の場合　${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 18$ 通り

(イ)の場合　${}_3\mathrm{C}_2 \times 4^2 = 48$ 通り

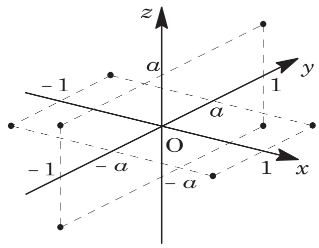
(2)　X から 2 点を選んだとき，2 点間の距離は，2，$2a$，$\sqrt{4+4a^2}$ のいずれかである。



$0<a<1$ より，最小の距離は $2a$ であり，この選び方は 2 通りある。すると，Y から，また Z から 2 点を選んだときも同様なので，(ア)の場合は $3\times 2=6$ 通りである。

(3)　X, Y から 1 点ずつ選んだとき, 2 点間の距離は,

$$\sqrt{1+(a-1)^2+a^2}=\sqrt{2a^2-2a+2}$$
$$\sqrt{1+(a+1)^2+a^2}=\sqrt{2a^2+2a+2}$$



$0<a<1$ より，最小の距離は $\sqrt{2a^2-2a+2}$ であり，この選び方は $2\times 4=8$ 通りある。すると，Y, Z から，また Z, X から 1 点ずつ選んだときも同様なので, (イ)の場合は $3\times 8=24$ 通りである。

(4)　条件より，$2a=\sqrt{2a^2-2a+2}$，$4a^2=2a^2-2a+2$，$a^2+a-1=0$ ………①

$0<a<1$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

さて, (2)のとき，$(1,\ a,\ 0)$ と $(1,\ -a,\ 0)$ を選んで,

$$\cos\theta=\frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2}}=\frac{1-a^2}{1+a^2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また, (3)のとき，$(1,\ a,\ 0)$ と $(0,\ 1,\ a)$ を選んで,

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{1+a^2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，①より $a=1-a^2$ なので，②と③は等しくなり,

$$\cos\theta=\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+(1-a)}=\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

［解 説］

難しそうな雰囲気ですが，図を書いていくと，全体像が見えてきます。

3

問題のページへ

(1)　$a_n=n^2+1$ より，$a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=10$，$a_4=17$，$a_5=26$

$b_n=3n^2+3$ より，$b_1=6$，$b_2=15$，$b_3=30$

よって，$c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=6$，$c_4=10$，$c_5=15$，$c_6=17$

(2)　(i)　$n=3k$ のとき　$a_{3k}=(3k)^2+1=3\cdot 3k^2+1$

a_{3k} は 3 で割ると 1 余る数である。

(ii)　$n=3k-1$ のとき　$a_{3k-1}=(3k-1)^2+1=3(3k^2-2k)+2$

a_{3k-1} は 3 で割ると 2 余る数である。

(iii)　$n=3k-2$ のとき　$a_{3k-2}=(3k-2)^2+1=3(3k^2-4k+1)+2$

a_{3k-2} は 3 で割ると 2 余る数である。

(i)(ii)(iii)より，a_n は 3 の倍数ではなく，数列 $\{b_n\}$ のどの項とも一致しない。

(3)　数列 $\{c_n\}$ において，$\{b_n\}$ から来る項が連続して並ぶと仮定する。

すなわち，(2)から，ある自然数 l, m に対して，

$$a_l<b_m<b_{m+1}<a_{l+1},\ \ a_l<3a_m<3a_{m+1}<a_{l+1}$$

$a_l<3a_m$ より，$3a_m-a_l=3(m^2+1)-(l^2+1)=3m^2-l^2+2>0$ となり，

$$l<\sqrt{3m^2+2}$$

このとき，
$$\begin{aligned}3a_{m+1}-a_{l+1}&=3\{(m+1)^2+1\}-\{(l+1)^2+1\}\\&=3m^2-l^2+6m-2l+4>6m-2l+2\\&>6m-2\sqrt{3m^2+2}+2=2(3m+1-\sqrt{3m^2+2})\\&=2\cdot\frac{(3m+1)^2-(3m^2+2)}{3m+1+\sqrt{3m^2+2}}=\frac{2\{6m(m+1)-1\}}{3m+1+\sqrt{3m^2+2}}>0\end{aligned}$$

これは，$3a_{m+1}<a_{l+1}$ と矛盾する。

したがって，$\{c_n\}$ において，$\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばない。

［解　説］

(3)の背理法は，無理矢理おさえ込んだような証明になってしまいました。

4

問題のページへ

(1) $\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}=\dfrac{\overline{z}}{4}+\dfrac{4}{\overline{z}}$，$\dfrac{z-\overline{z}}{4}+\dfrac{4(\overline{z}-z)}{z\overline{z}}=0$

$z\overline{z}(z-\overline{z})+16(\overline{z}-z)=0\quad(z\neq 0)$

$(z-\overline{z})(z\overline{z}-16)=0$ より，$z=\overline{z}$ または $z\overline{z}=16$

(i) $z=\overline{z}$ のとき

z は 0 でない実数なので, r は正の任意の値で，$\theta=0°$，$180°$ である。

(ii) $z\overline{z}=16$ のとき

$|z|=4$ より，$r=4$ で，θ は $0°\leqq\theta<360°$ の任意の値をとる。

(2) (i) $z=\overline{z}$ のとき

z は実数なので，点 z は実軸上にあり，条件より，

$$0\leqq\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\leqq 4,\quad 0\leqq\frac{z^2+16}{4z}\leqq 4$$

まず，$z^2+16>0$ なので，左側の不等式は $z>0$ と等しい。

すると，右側の不等式は，$z^2+16\leqq 16z$，$z^2-16z+16\leqq 0$

$$8-4\sqrt{3}\leqq z\leqq 8+4\sqrt{3}$$

(ii) $z\overline{z}=16$ のとき

$|z|=4$ なので，点 z は原点を中心とする半径 4 の円周上にある。

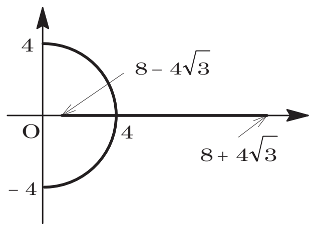
$z=4(\cos\theta+i\sin\theta)\ (0°\leqq\theta<360°)$ とおくと，

$$\frac{z}{4}+\frac{4}{z}=(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=2\cos\theta$$

$0\leqq\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}\leqq 4$ より，$0\leqq\cos\theta\leqq 2$

よって，$0°\leqq\theta\leqq 90°$，$270°\leqq\theta<360°$

(i)(ii)より，点 z は右図の太線を描く。



［解 説］

1998 年に，北大の理系で，数値が異なるだけの同じ問題が出ています。そのとき作成した解答を貼り付け，数値を訂正したのが，上の解です。