1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる。このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。

2

解答解説のページへ

θ を$0°<\theta<180°$とする。2 つの数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$を

$$x_1=\cos\theta\ ,\ \ y_1=\sin\theta\ ,\ \ x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}\ ,\ \ y_{n+1}=\frac{y_n}{2x_{n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　x_2，y_2を計算せよ。さらに，一般項x_n，y_nを求めよ。

(2)　$n\geqq 7$ ならば，$(x_n+y_ni)^{4n}=i$とはならないことを示せ。ただし，$i=\sqrt{-1}$は虚数単位とする。

(3)　θ が$90°<\theta<180°$の範囲にあるとき，$(x_n+y_ni)^{4n}=i$となる n とθ を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 つの単位ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθ とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数$f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2$の$x\geqq 0$における最小値を求めよ。

(2)　θ が$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$の範囲を動くとき，放物線$y=f(x)$の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3)　(2)で求めた軌跡とx軸が囲む図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　日本語の本が x 冊, 英語の本が $10-x$ 冊とすると, 条件より,

$$\frac{{}_{10-x}\mathrm{C}_2\times{}_x\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{40},\quad 40\cdot\frac{(10-x)(9-x)}{2}x=7\times120$$

$$(10-x)(9-x)x=42,\quad (x-7)(x^2-12x+6)=0$$

よって, $x=7,\ 6\pm\sqrt{30}$ となり, x は整数より, 日本語の本は 7 冊ある。

(2)　赤色の組から取り出すカードの数を a, 青色の組から取り出すカードの数を b, 黄色の組から取り出すカードの数を c とおくと, 条件より,

$$a+b+c=15\ \ (1\leqq a\leqq12,\ 1\leqq b\leqq12,\ 1\leqq c\leqq12)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, $1\leqq a$, $1\leqq b$, $1\leqq c$ の条件のもとで, $a+b+c=15$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数は, ○を 15 個並べて, その間の 14 か所に 2 つの「しきり」を入れる場合の数として数えられるので, ${}_{14}\mathrm{C}_2=91$ 通りとなる。

次に, この 91 通りのなかで, $a\leqq12$, $b\leqq12$, $c\leqq12$ を満たさない場合は,

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 13),\ (1,\ 13,\ 1),\ (13,\ 1,\ 1)$$

よって, $(*)$を満たす場合の数は, $91-3=88$ 通りとなる。

［解　説］

(1)の 3 次方程式の因数分解については, $42=3\times2\times7$ に注目して, 因数の「あたり」をつけることができます。

2

問題のページへ

(1) $x_2=\sqrt{\dfrac{1+x_1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

$0°<\theta<180°$から，$0°<\dfrac{\theta}{2}<90°$なので，$x_2=\cos\dfrac{\theta}{2}$となる。

$$y_2=\frac{y_1}{2x_2}=\frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\sin\frac{\theta}{2}$$

これより，$x_n=\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$，$y_n=\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$と推測される。

以下，この推測の正しいことを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　明らかに成立する。

(ii) $n=k$のとき　$x_k=\cos\dfrac{\theta}{2^{k-1}}$，$y_k=\sin\dfrac{\theta}{2^{k-1}}$と仮定する。

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{1+x_k}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}=\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^k}}=\left|\cos\frac{\theta}{2^k}\right|$$

$0°<\dfrac{\theta}{2^k}<90°$より，$x_{k+1}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$

$$y_{k+1}=\frac{y_k}{2x_{k+1}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2\cos\frac{\theta}{2^k}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2^k}\cos\frac{\theta}{2^k}}{2\cos\frac{\theta}{2^k}}=\sin\frac{\theta}{2^k}$$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n=\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$，$y_n=\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

(2) $z_n=x_n+y_ni=\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}+i\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$とおくと，

$$z_n{}^{4n}=\cos\frac{4n\theta}{2^{n-1}}+i\sin\frac{4n\theta}{2^{n-1}}=\cos\frac{n\theta}{2^{n-3}}+i\sin\frac{n\theta}{2^{n-3}}$$

$z_n{}^{4n}=i$より，$\cos\dfrac{n\theta}{2^{n-3}}=0$ ………①，$\sin\dfrac{n\theta}{2^{n-3}}=1$ ………②

ここで，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2^{n-3}}=\dfrac{2^{n-4}-n}{2^{n-3}}$から，$n\geqq 7$ のとき，$2^{n-4}>n$であることを，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=7$のとき　$2^{7-4}>7$より成立する。

(ii) $n=l$のとき　$2^{l-4}>l$と仮定する。

$$2^{l-3}-(l+1)>2l-(l+1)=l-1>0$$

よって，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 7$ のとき，$2^{n-4}>n$となる。

すると，$\dfrac{1}{2}>\dfrac{n}{2^{n-3}}>0$から$0°<\dfrac{n\theta}{2^{n-3}}<90°$となり，①②を満たす n は存在しない。

(3)　(2)より, $1 \leqq n \leqq 6$ の場合について考える。

n と $\dfrac{n}{2^{n-3}}$ との対応をまとめると，右表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6
2^{n-3}	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	1	2	4	8
$\dfrac{n}{2^{n-3}}$	4	4	3	2	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

そこで，$90° < \theta < 180°$ から，①②を満たす θ を求める。

(i)　$\dfrac{n}{2^{n-3}} = 4\ (n = 1,\ 2)$ のとき

$360° < 4\theta < 720°$ から，$4\theta = 360° + 90°$，$\theta = 112.5°$

(ii)　$\dfrac{n}{2^{n-3}} = 3\ (n = 3)$ のとき

$270° < 3\theta < 540°$ から，$3\theta = 360° + 90°$，$\theta = 150°$

(iii)　$\dfrac{n}{2^{n-3}} = 2\ (n = 4)$ のとき

$180° < 3\theta < 360°$ から，①②を満たす θ は存在しない。

(iv)　$\dfrac{n}{2^{n-3}} = \dfrac{5}{4}\ (n = 5)$ のとき

$112.5° < \dfrac{5}{4}\theta < 225°$ から，①②を満たす θ は存在しない。

(v)　$\dfrac{n}{2^{n-3}} = \dfrac{3}{4}\ (n = 6)$ のとき

$67.5° < \dfrac{3}{4}\theta < 135°$ から，$\dfrac{3}{4}\theta = 90°$，$\theta = 120°$

(i)～(v)より，$(n,\ \theta) = (1,\ 112.5°)$，$(2,\ 112.5°)$，$(3,\ 150°)$，$(6,\ 120°)$

［解 説］

難問というわけではないのですが，忍耐力を要する問題です。数学的帰納法も 2 回も登場しています。

3

問題のページへ

$f(x)=x^3-ax^2+b$ に対し，$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$ の解は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$ となり，極値をもつことから $a\neq 0$ である。

(i)　$a>0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f(0)=b=5$ ………①

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=1$ ………②

①②より，$-\dfrac{4}{27}a^3=-4$，$a=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii)　$a<0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=5$ ………③

$f(0)=b=1$ ………④

③④より，$-\dfrac{4}{27}a^3=4$，$a=-3$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ 1)$

［解 説］

3 次関数の増減を調べる微分の基本題です。

4

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2x^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+2x\cos\theta+1$

$$=(x+\cos\theta)^2-\cos^2\theta+1=(x+\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

(i)　$\cos\theta<0\ (90°<\theta\leqq 180°)$ のとき

$x=-\cos\theta>0$ より, $x\geqq 0$ における最小値は，$\sin^2\theta\ (x=-\cos\theta)$ となる。

(ii)　$\cos\theta\geqq 0\ (0°\leqq\theta\leqq 90°)$ のとき

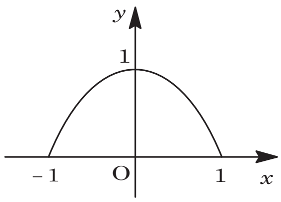
$x=-\cos\theta\leqq 0$ より, $x\geqq 0$ における最小値は, $1\,(x=0)$ となる。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点を $(x,\ y)$ とおくと,

$$x=-\cos\theta,\quad y=-\cos^2\theta+1$$

よって，$y=-x^2+1$ となる。

また，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より $-1\leqq x\leqq 1$ となり，求める軌跡は，放物線 $y=-x^2+1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ である。



(3)　(2)の放物線と x 軸が囲む図形の面積を S とすると,

$$S=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx=2\Big[-\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^1=\frac{4}{3}$$

［解 説］

数Ⅱ, 数 B の基本問題の組合せです。