

1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 実数 x, y, z について

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

を示し、等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて、命題

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 \leq a \text{ ならば } x + y + z \leq a \text{ である} \right]$$

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b を正の実数とし, 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n + a_n^2}{a_n^2 + 5a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{3a_n b_n}{a_n^2 + 5a_n b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面において、点 A の座標を $(2, 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。 T が円周上を動くとき、 P が描く曲線の長さを求めよ。

4

解答解説のページへ

O を原点とする複素数平面上で、複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。 z の偏角を θ と表す。 $w = z^2 + \frac{1}{z}$ とおき、 w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし、 θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

- (1) $w = 0$ となる θ をすべて求めよ。
- (2) $w \neq 0$ のとき、 w の偏角 β を θ で表せ。ただし、 β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。
- (3) 三角形 OXY の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 分数関数 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ に対して,

$$y = \frac{-a(a-x) + a^2 - 1}{a-x} = -a + \frac{-a^2 + 1}{x-a}$$

(i) $-a^2 + 1 > 0$ ($0 < a < 1$) のとき

右図より, $x \geq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

$$y \leq -\frac{1}{a}, \quad -a < y$$

(ii) $-a^2 + 1 = 0$ ($a = 1$) のとき

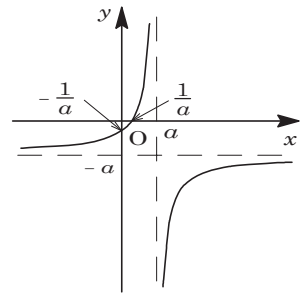
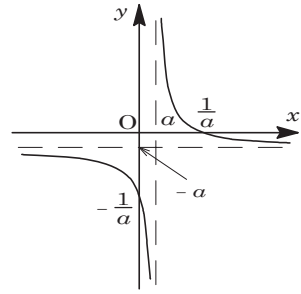
$$y = \frac{x-1}{1-x} = -1 \quad (x \neq 1)$$

よって, $x \geq 0$ のとき, $y = -1$

(iii) $-a^2 + 1 < 0$ ($a > 1$) のとき

右図より, $x \geq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

$$y < -a, \quad -\frac{1}{a} \leq y$$



(2) まず, $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ の証明をする。

右辺と左辺の差をとり,

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \dots\dots\dots (*)$

等号は, $x-y=y-z=z-x=0$, すなわち $x=y=z$ のときに成立する。

さて, $x^2+y^2+z^2 \leq a$ が成立するとき, (*)より,

$$(x+y+z)^2 \leq 3a, \quad -\sqrt{3a} \leq x+y+z \leq \sqrt{3a}$$

なお, 等号の成立するのは, $x=y=z = \pm \frac{\sqrt{3a}}{3}$ のときである。

このとき, $x+y+z \leq a$ が成立する条件は,

$$\sqrt{3a} \leq a, \quad 3a \leq a^2, \quad 3 \leq a$$

よって, 求める最小の正の実数 a は 3 である。

[解説]

第 1 問は互いに関連のない小問 2 題です。意表を突いた出題です。

2

問題のページへ

(1) $a_1 = a > 0$, $b_1 = b > 0$ であり, 条件から,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n + a_n^2}{a_n^2 + 5a_n b_n} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = \frac{3a_n b_n}{a_n^2 + 5a_n b_n} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって, ①②より, 帰納的に $a_n > 0$, $b_n > 0$ である。

すると, ①②から,

$$a_{n+1} = \frac{2b_n + a_n}{a_n + 5b_n} \cdots \cdots \textcircled{1}', \quad b_{n+1} = \frac{3b_n}{a_n + 5b_n} \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

これより, $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2b_n + a_n}{a_n + 5b_n} \cdot \frac{a_n + 5b_n}{3b_n} = \frac{2b_n + a_n}{3b_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}c_n$

$$c_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(c_n - 1)$$

よって, $c_n - 1 = (c_1 - 1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ から, $c_n = 1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) (1)より, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$\textcircled{1}' \text{ から, } a_{n+1} = \frac{2 + \frac{a_n}{b_n}}{\frac{a_n}{b_n} + 5} = \frac{2 + c_n}{c_n + 5} \text{ となり, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{2+1}{1+5} = \frac{1}{2} \text{ から,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{また, } b_n = \frac{a_n}{c_n} \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{2}$$

[解説]

漸化式①と②は, 分母と分子を a_n で割った①' と②' と同じ式です。この点に, 数列 $\{c_n\}$ の漸化式をつくる段階まで気がつきませんでした。

3

問題のページへ

線分 OA を直径とする円は、中心(1, 0)から、

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

T(1 + cosθ, sinθ) とすると、T における接線は、

$$(1 + \cos\theta - 1)(x - 1) + y \sin\theta = 1$$

$$x \cos\theta + y \sin\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

$$\text{すると、} OP = \frac{|-\cos\theta - 1|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \cos\theta + 1$$

これから、P(x, y) とおくと、

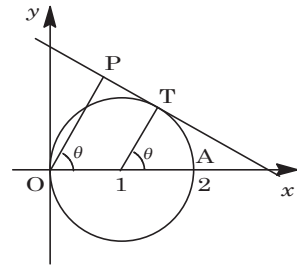
$$x = (\cos\theta + 1)\cos\theta, \quad y = (\cos\theta + 1)\sin\theta$$

0 ≤ θ ≤ 2π のとき、点 P が描く曲線の長さを l とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \cos\theta - (\cos\theta + 1)\sin\theta = -\sin 2\theta - \sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin^2\theta + (\cos\theta + 1)\cos\theta = \cos 2\theta + \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin 2\theta - \sin\theta)^2 + (\cos 2\theta + \cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 1 + 2(\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \cos\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$



[解説]

有名曲線であるカージオイドの長さを求める頻出問題です。

4

- (1)
- $w = 0$
- より,
- $z^2 + \frac{1}{z} = 0$
- ,
- $z^3 + 1 = 0$
- となり,

$$(z+1)(z^2 - z + 1) = 0$$

よつて, $z = -1$, $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ から, $\theta = \arg z = -\pi, \pm \frac{\pi}{3}$

- (2)
- $z = \cos \theta + i \sin \theta$
- とおくと,

$$\begin{aligned} w &= z^2 + \frac{1}{z} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta + \cos \theta - i \sin \theta \\ &= 2 \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2i \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{3\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで, $-\pi \leq \theta < \pi$ より, $-\frac{3}{2}\pi \leq \frac{3}{2}\theta < \frac{3}{2}\pi$ であり, また, $w \neq 0$ から, (1)より $\theta \neq -\pi$, $\theta \neq \pm \frac{\pi}{3}$, すなわち $\frac{3}{2}\theta \neq -\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ となる。

- (i)
- $-\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\theta < -\frac{\pi}{2}$
- (
- $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{3}$
-) のとき

このとき, $2 \cos \frac{3\theta}{2} < 0$ となるので,

$$w = -2 \cos \frac{3\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) = -2 \cos \frac{3\theta}{2} \left\{ \cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

すると, $\frac{\pi}{2} < \pi + \frac{\theta}{2} < \frac{5}{6}\pi$ から, $\beta = \arg w = \pi + \frac{\theta}{2}$

- (ii)
- $-\frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\theta < \frac{\pi}{2}$
- (
- $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$
-) のとき

このとき, $2 \cos \frac{3\theta}{2} > 0$ であり, $-\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{6}$ から, $\beta = \arg w = \frac{\theta}{2}$

- (iii)
- $\frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\theta < \frac{3}{2}\pi$
- (
- $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$
-) のとき

このとき, $2 \cos \frac{3\theta}{2} < 0$ となるので,

$$w = -2 \cos \frac{3\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) = -2 \cos \frac{3\theta}{2} \left\{ \cos \left(-\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(-\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

すると, $-\frac{5}{6}\pi < -\pi + \frac{\theta}{2} < -\frac{\pi}{2}$ から, $\beta = \arg w = -\pi + \frac{\theta}{2}$

- (3)
- $\triangle OXY$
- の面積を
- S
- とすると,

$$S = \frac{1}{2} OX \cdot OY |\sin(\beta - \theta)| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |2 \cos \frac{3}{2}\theta| |\sin(\beta - \theta)|$$

- (i)
- $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{3}$
- のとき

$$S = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \right| \left| \sin \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) \right| = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

- (ii)
- $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$
- のとき

$$S = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \right| \left| \sin \left(-\frac{\theta}{2} \right) \right| = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

(iii) $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき

$$S = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \right| \left| \sin \left(-\pi - \frac{\theta}{2} \right) \right| = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

(i)~(iii)より, $S = \left| \cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{2} |\sin 2\theta - \sin \theta|$

すると, 条件より, $\frac{1}{2} |\sin 2\theta - \sin \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり,

$$\sin 2\theta - \sin \theta = \pm\sqrt{3}, \quad 2\sin \theta \cos \theta - \sin \theta = \pm\sqrt{3} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ とおくと,

$$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}, \quad 2xy - y = \pm\sqrt{3} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

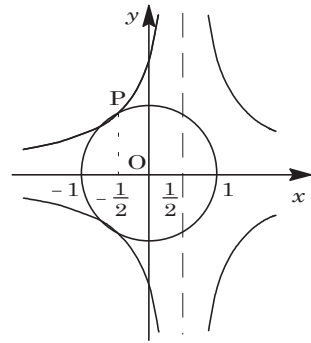
$-\pi \leq \theta < \pi$ より, ①の解の個数は, ②かつ③の解の個数と一致する。

さて, ③より, $(2x-1)y = \pm\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{2}$ とすると成立しないので, $x \neq \frac{1}{2}$ から,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2x-1} \dots\dots\dots \textcircled{4}, \quad y = \frac{-\sqrt{3}}{2x-1} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

ここで, 円②と曲線⑤は, $x = -\frac{1}{2}$ のとき共有点をも



ち, この点を $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく。

②より, $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ となり, 点 P に

おいて $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

⑤より, $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{3}}{(2x-1)^2}$ となり, 点 P において $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

すると, $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ より, 円②と曲線⑤は 2 個の共有点をもつ。さらに, 曲線④と曲線⑤は x 軸に関して対称なので, 円②と曲線④も 2 個の共有点をもち, 円②と曲線③は, 合わせて 4 個の共有点をもつ。

よって, ①の解は 4 個となり, $\triangle OXY$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は 4 個存在する。

[解説]

(2)から複雑さが増してきます。(3)の解の個数を求めるのに, 関数設定をして増減を調べるというオーソドックスな方法では, 多量の計算が必要となります。考え直して, 図形的に解いてみました。押さえ込んだ印象のする解き方ですが。