1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2) $t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3) 座標平面上の円 $C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。

2

解答解説のページへ

自然数 n, k が $n \geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $a > b > c$ と等式 ${}_a\mathrm{C}_3 + {}_b\mathrm{C}_2 + {}_c\mathrm{C}_1 = 29$ をともに満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。

(2)　n を自然数とする。次の等式を証明せよ。

$$ {}_{n+3}\mathrm{C}_3 = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 + 1 $$

(3)　自然数 a, b, c, d は $a > b > c > d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$ {}_a\mathrm{C}_3 > {}_b\mathrm{C}_3 + {}_c\mathrm{C}_2 + {}_d\mathrm{C}_1 $$

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x|\leqq 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

と定め，$g(x)=\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。

4

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $A(1,\ 0)$，$B(-b,\ 0)$ をとる。ただし，$b>0$ とする。点 A を中心とし原点 $O(0,\ 0)$ を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle POA$ を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2) $\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3) 点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ より，$\left(x-\dfrac{1}{x}-1\right)\left(x-\dfrac{1}{x}-2\right)=0$

$$x-\frac{1}{x}-1=0,\ \ x-\frac{1}{x}-2=0$$

よって，$x^2-x-1=0$，$x^2-2x-1=0$ から，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$1\pm\sqrt{2}$

(2)　$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2a^2$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\frac{1}{x}-2a\left(x-\frac{1}{x}\right)+2a^2$$

$$=t^2-2at+2a^2+2$$

(3)　$C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ ……①と $C_2:y=\dfrac{1}{x}$ ……②の共有点の x 座標は，

$$(x-a)^2+\left(\frac{1}{x}+a\right)^2=r^2$$

(2)より，$t^2-2at+2a^2+2-r^2=0$ ………③

ここで，$t=x-\dfrac{1}{x}$ から，$x^2-tx-1=0$ となり，その判別式は，

$$D=t^2+4>0$$

よって，どんな t の値に対しても，$x\neq0$ は 2 個ずつ対応する。すなわち，①と②が 2 個の共有点をもつ条件は，③が重解をもつことと同値である。③の判別式は，

$$D/4=a^2-(2a^2+2-r^2)=0,\ \ r^2=a^2+2$$

よって，$r>0$ より，$r=\sqrt{a^2+2}$

［解　説］

xt 平面上に $t=x-\dfrac{1}{x}$ のグラフを描くと，1 個の t の値に対して 2 個の x の値が対応することは明らかです。ただし，文系の範囲ではありませんが。

2

問題のページへ

(1)　${}_a\mathrm{C}_3+{}_b\mathrm{C}_2+{}_c\mathrm{C}_1=29$ より，$\dfrac{1}{6}a(a-1)(a-2)+\dfrac{1}{2}b(b-1)+c=29$

すると, $a>b>c$ のもとで，この式を満たす 1 組の $(a,\ b,\ c)$ は,

$$(a,\ b,\ c)=(6,\ 4,\ 3)$$

(2)　${}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1=\dfrac{1}{6}(n+2)(n+1)n+\dfrac{1}{2}(n+1)n+n+1$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{(n+2)n+3n+6\}=\frac{1}{6}(n+1)(n^2+5n+6)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)={}_{n+3}\mathrm{C}_3$$

(3)　$a>b>c>d\geqq1$ より, $a\geqq4$ となり, (2)から,

$${}_a\mathrm{C}_3={}_{a-1}\mathrm{C}_3+{}_{a-2}\mathrm{C}_2+{}_{a-3}\mathrm{C}_1+1$$

ここで，$a-1\geqq b\geqq3$，$a-2\geqq c\geqq2$，$a-3\geqq d\geqq1$ となるので,

$${}_{a-1}\mathrm{C}_3\geqq{}_b\mathrm{C}_3,\ \ {}_{a-2}\mathrm{C}_2\geqq{}_c\mathrm{C}_2,\ \ {}_{a-3}\mathrm{C}_1\geqq{}_d\mathrm{C}_1$$

よって，${}_a\mathrm{C}_3\geqq{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1+1>{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1$

［解 説］

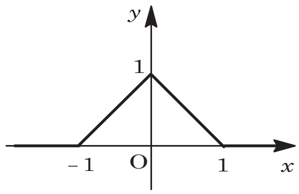
二項係数についての証明問題です。(2)は(3)の誘導となっています。(1)の役割は定義の確認でしょうか。

$\boxed{3}$

問題のページへ

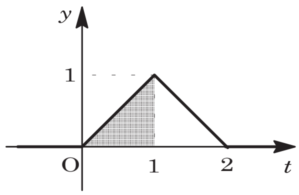
(1)　$|x| \leqq 1$ において $f(x) = 1 - |x|$ より，$y = f(x)$ のグラフは $y = -|x|$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

　また，$|x| > 1$ において $f(x) = 0$ より，$y = f(x)$ のグラフは右図の太線部となる。



(2)　$y = f(t-1)$ のグラフは，$y = f(t)$ のグラフを t 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

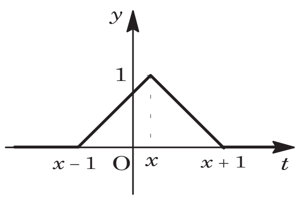
　すると，$g(1) = \int_0^1 f(t-1)\,dt$ より，$g(1)$ は右図の網点部の面積を表す。



$$g(1) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(3)　$y = f(t-x)$ のグラフは，$y = f(t)$ のグラフを t 軸方向に x だけ平行移動したものである。

　また，(2)と同様に考えて，$g(x)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で，$y = f(t-x)$ のグラフと t 軸にはさまれた部分の面積を表す。



(i)　$x + 1 \leqq 0\ (x \leqq -1)$ のとき　$g(x) = 0$

(ii)　$x \leqq 0,\ 0 \leqq x + 1\ (-1 \leqq x \leqq 0)$ のとき　$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

(iii)　$x - 1 \leqq 0,\ 0 \leqq x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ のとき

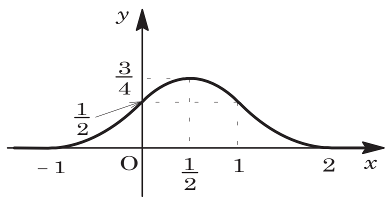
$$g(x) = \frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(x+1-1)^2$$
$$= -x^2 + x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

(iv)　$x - 1 \leqq 1,\ 1 \leqq x\ (1 \leqq x \leqq 2)$ のとき

$$g(x) = \frac{1}{2}(1-x+1)^2 = \frac{1}{2}(x-2)^2$$

(v)　$x - 1 \geqq 1\ (x \geqq 2)$ のとき　$g(x) = 0$

　以上より，$y = g(x)$ のグラフは右図の太線部となる。

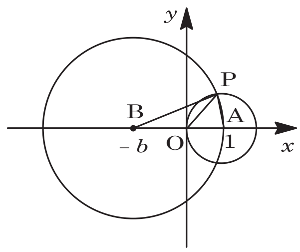


［解 説］

　絶対値付きの関数の積分ですが，面積を対応させれば，積分計算を実行するまでもありません。

4

問題のページへ



(1) 円C_1の半径は 1 より，$(x-1)^2+y^2=1$ ………①

また, 円C_2の半径は$b+1$より,

$(x+b)^2+y^2=(b+1)^2$ ………②

円C_1，C_2の共通弦の方程式は，②－①より，

$(2b+2)x+b^2-1=b^2+2b$，$x=\dfrac{2b+1}{2b+2}$

よって，点 P の x 座標は，$x=\dfrac{2b+1}{2b+2}$ である。

(2) △OAP は AO = AP = 1 の二等辺三角形より，

$\mathrm{OP}=2\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta$ ………③

(1)より，$\mathrm{OP}\cos\theta=\dfrac{2b+1}{2b+2}$ ………④

③④から，$2\cos^2\theta=\dfrac{2b+1}{2b+2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{2b+1}{4b+4}$ となり，

$\sin^2\theta=1-\dfrac{2b+1}{4b+4}=\dfrac{2b+3}{4b+4}$

$\sin\theta>0$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{2b+3}{4b+4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2b+3}{b+1}}$

(3) △BAP は $\mathrm{BA}=\mathrm{BP}=b+1$，$\mathrm{AP}=1$ の二等辺三角形である。

すると, B から AP に下ろした垂線の長さが $\dfrac{20}{9}$ より,

$\sqrt{(b+1)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{20}{9}$，$(b+1)^2=\dfrac{400}{81}+\dfrac{1}{4}$，$(b+1)^2=\dfrac{41^2}{81\times4}$

よって, $b>0$ から，$b+1=\dfrac{41}{18}$，$b=\dfrac{23}{18}$

また, (2)より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{46+54}{23+18}}=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$

［解 説］

点 P の y 座標を求める計算に対しては, 気乗りがしませんでした。そのため, (2)からは図形的に解いています。