1

解答解説のページへ

座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし，$p \neq 0$ とする。

(2) 点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 $a,\ b$ は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

3

解答解説のページへ

行列 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は，次の関係式で定まるものとする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^n \end{pmatrix} A_{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) b_3 の値を求めよ。

(2) b_{2n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

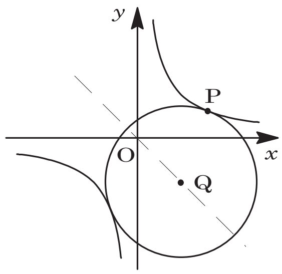
座標平面において，原点 O$(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 Q$(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を R$(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2)　θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ に対して，$y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$における法線は，その傾きが p^2 より，

$$y - \frac{1}{p} = p^2(x - p)$$

よって，$y = p^2x - p^3 + \dfrac{1}{p}$ ………①

(2)　双曲線 C_1 と，中心が $\mathrm{Q}(q,\ -q)$，半径が r の円 C_2 は，

直線 $y = -x$ に関して対称なので，C_1 と C_2 が 2 個の共有点をもつのは，C_1 と C_2 が接するときである。

すなわち，接点 P における C_1 の法線が点 Q を通る場合となり，①より，

$$-q = p^2q - p^3 + \frac{1}{p},\quad p(p^2+1)q - (p^2+1)(p^2-1) = 0$$

$p^2 + 1 > 0$ から，$pq - p^2 + 1 = 0$，$p - \dfrac{1}{p} = q$ ………②

さて，$r^2 = \mathrm{PQ}^2 = (p-q)^2 + \left(\dfrac{1}{p} + q\right)^2 = 2q^2 - 2pq + \dfrac{2q}{p} + p^2 + \dfrac{1}{p^2}$

$$= 2q^2 - 2q\left(p - \frac{1}{p}\right) + \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2$$

②より，$r^2 = 2q^2 - 2q^2 + q^2 + 2 = q^2 + 2$

$r > 0$ から，$r = \sqrt{q^2 + 2}$

［解 説］

②式を導くのがポイントです。なお，文系で類題が出ています。ただし，アプローチの方法は異なっています。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ に対して,

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

(2)　$g(x)=x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと,

$$g'(x)=1-(x+1)\frac{1}{x+1}-\log(x+1)=-\log(x+1)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となるので,

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$f'(x)<0$ となり, $x>0$ において，$f(x)$ は単調に減少する。

すると, $0<a<b$ に対して，$f(a)>f(b)$ となり,

$$\frac{\log(a+1)}{a}>\frac{\log(b+1)}{b},\ \ \log(a+1)^b>\log(b+1)^a$$

よって，$(a+1)^b>(b+1)^a$

［解 説］

関数の単調性と不等式の証明をリンクさせた有名問題です。類した過去問は数え切れません。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$A_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 11\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$A_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 11\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 38\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

よって，$b_3=38$

(2) $B_n=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2+(-1)^n\end{pmatrix}$とおくと，$A_{2n+1}=B_{2n+1}A_{2n}=B_{2n+1}B_{2n}A_{2n-1}$

ここで，$B_{2n+1}B_{2n}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 3\end{pmatrix}$より，

$$\begin{pmatrix}a_{2n+1} & b_{2n+1}\\ c_{2n+1} & d_{2n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2n-1} & b_{2n-1}\\ c_{2n-1} & d_{2n-1}\end{pmatrix}$$

$b_{2n+1}=b_{2n-1}+12d_{2n-1}\cdots\cdots\cdots$①，$d_{2n+1}=3d_{2n-1}\cdots\cdots\cdots$②

$d_1=3$から，②より，$d_{2n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

①に代入して，$b_{2n+1}=b_{2n-1}+12\cdot 3^n$から，

$$b_{2n+1}=b_1+\sum_{k=1}^{n}12\cdot 3^k=2+\frac{12\cdot 3(3^n-1)}{3-1}=2\cdot 3^{n+2}-16$$

(3) (2)と同様にして，$A_{2n+2}=B_{2n+2}B_{2n+1}A_{2n}$

ここで，$B_{2n+2}B_{2n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$より，

$$\begin{pmatrix}a_{2n+2} & b_{2n+2}\\ c_{2n+2} & d_{2n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2n} & b_{2n}\\ c_{2n} & d_{2n}\end{pmatrix}$$

$b_{2n+2}=b_{2n}+6d_{2n}\cdots\cdots\cdots$③，$d_{2n+2}=3d_{2n}\cdots\cdots\cdots$④

$d_2=9$から，④より，$d_{2n}=9\cdot 3^{n-1}=3^{n+1}$

③に代入して，$b_{2n+2}=b_{2n}+6\cdot 3^{n+1}$から，

$$b_{2n}=b_2+\sum_{k=1}^{n-1}6\cdot 3^{k+1}=11+\frac{6\cdot 9(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^{n+2}-16\quad(n\geqq 2)$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+2}-16}{3^{n+2}-16}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{16}{3^{n+2}}}{1-\frac{16}{3^{n+2}}}=2$

［解 説］

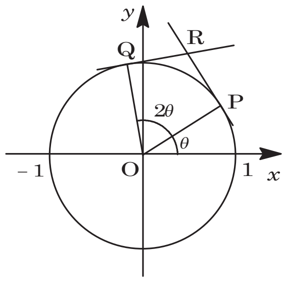
一般項を推測するのは難しそうなので，成分に関する漸化式を立てました。(2)の設問から，n を偶奇に分けて計算しています。

4

問題のページへ

(1)　点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における接線の方程式は，それぞれ，

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1,\ x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 1$$



この 2 本の接線の交点 $R(\alpha,\ \beta)$ は，

$$\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1,\ \alpha\cos 3\theta + \beta\sin 3\theta = 1$$

まとめると，$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

さて，$\Delta = \cos\theta\sin 3\theta - \sin\theta\cos 3\theta = \sin(3\theta - \theta) = \sin 2\theta$

すると，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ より，$\sin 2\theta > 0$ なので，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin 2\theta}\begin{pmatrix} \sin 3\theta & -\sin\theta \\ -\cos 3\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\alpha = \frac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$$\beta = \frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta$$

(2)　(1)より，$x = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，$y = 2\sin\theta$ となり，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

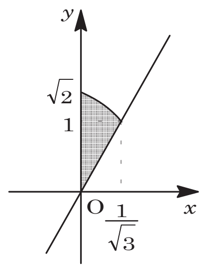
$$= \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積を S とすると，



$$S = \int_1^{\sqrt{2}} x\,dy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[解 説]

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。