1

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる。このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ。

(1) 0，1，2，3，4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2) 用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

2

解答解説のページへ

関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle \mathrm{O} = \left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle \mathrm{A_0} = 90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n = 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r = \cos\angle \mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle \mathrm{O} = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle \mathrm{O} = 30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

4

解答解説のページへ

座標平面の原点をOとし，4点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$を頂点とする長方形の周をRとする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対し，$(1,\ 0)$を出発してR上を反時計回りに秒速1で移動する点のn秒後の位置をP_nとし，OP_nとOP_{n+2}のなす角度をθ_nとおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$を求めよ。

(2)　すべてのnに対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$が成り立つような自然数$k$のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3)　θ_nが最小となるときのP_nの座標をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　0，1，2，3，4 の 5 枚のカードで 5 桁の整数を得るには，先頭の数字が 0 以外であればよいので，その個数は，

$$4\times 4!=96$$

(2)　先頭の数字が 5 の場合と 5 以外の場合に分けて，得られる 8 桁の整数の個数を，それぞれ求める。

(i)　先頭の数字が 5 のとき

$$1\times\frac{7!}{2!}=2520$$

(ii)　先頭の数字が 1, 2, 3, 4 のいずれかのとき

$$4\times\frac{7!}{2!\cdot 2!}=5040$$

(i)(ii)より，得られる 8 桁の整数の個数は，

$$2520+5040=7560$$

［解　説］

何か裏があるのではないかと疑心暗鬼になる内容です。

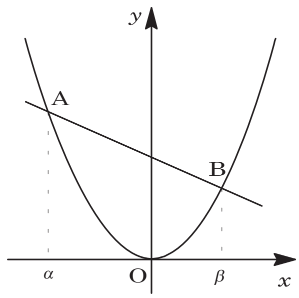
© 電送数学舎 2007

2

問題のページへ

(1)　直線 AB の方程式は,

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$



すると, 線分 AB と C で囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx=-\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　$\mathrm{AB}=l$ より, $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}=l$ となり,

$$(\beta-\alpha)\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}=l,\quad \beta-\alpha=\frac{l}{\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}}$$

すると, (1)より, $S=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{l^3}{\left(\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}\right)^3}$

よって, S が最大となるのは, $\beta+\alpha=0$ のときであり, 最大値は $\dfrac{l^3}{6}$ である。

このとき, 線分 AB の方程式は $y=-\alpha\beta$ となり, x 軸に平行である。

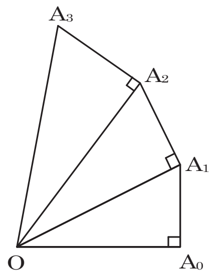
［解 説］

有名な $\dfrac{1}{6}$ 公式の証明とその応用です。

© 電送数学舎 2007

3

問題のページへ



(1)　まず，$r=\cos\angle A_{n-1}OA_{n-2}=\dfrac{OA_{n-2}}{OA_{n-1}}$

すると，$\triangle OA_{n-1}A_n$ と $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ の相似比は，

$$OA_{n-1}:OA_{n-2}=1:r$$

これより，$\triangle OA_{n-1}A_n$ と $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ の面積比は，

$$\triangle OA_{n-1}A_n:\triangle OA_{n-2}A_{n-1}=1:r^2$$

よって，相似な直角三角形の面積の列は，公比 $\dfrac{1}{r^2}$ の等比数列をなし，$\triangle OA_0A_1=1$ から，

$$S=\triangle OA_0A_1+\triangle OA_1A_2+\triangle OA_2A_3+\cdots+\triangle OA_{k-1}A_k$$

$$=1+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{r^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{r^2}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^k}{1-\dfrac{1}{r^2}}=\frac{r^2}{r^2-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^k\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$\angle O=45°$ のとき $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$k=8$ となり，このとき $S=S_1$ とおく。$\angle O=30°$ のとき $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$k=12$ となり，このとき $S=S_2$ とおく。

すると，(*)から，$S_1=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}-1}(1-2^8)=255$

$$S_2=\frac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}-1}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{12}\right\}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{12}-3$$

ここで，$S_1-S_2=255-3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{12}+3=3\left\{86-\left(\dfrac{4}{3}\right)^{12}\right\}$ となり，

$$\log_{10}86>\log_{10}81=4\log_{10}3=1.9084$$

$$\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{12}=12(2\log_{10}2-\log_{10}3)=1.4988$$

よって，$S_1>S_2$ より，$\angle O=45°$ のときの S の値の方が大きい。

［解 説］

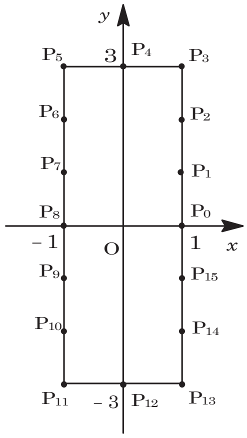
図形と数列の融合問題です。題意を把握するのに時間がかかりますが，内容は基本的なものです。

© 電送数学舎 2007

4

問題のページへ

(1) 題意より，$P_0(1,\ 0)$，$P_1(1,\ 1)$，$P_2(1,\ 2)$，$P_3(1,\ 3)$，$P_4(0,\ 3)$，$P_5(-1,\ 3)$，……となり，OP_n と OP_{n+2} のなす角度が θ_n から，



$$\cos\theta_n = \frac{\overrightarrow{OP_n}\cdot\overrightarrow{OP_{n+2}}}{|\overrightarrow{OP_n}||\overrightarrow{OP_{n+2}}|}$$

これより，$\cos\theta_0 = \dfrac{1}{1\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta_1 = \dfrac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta_2 = \dfrac{6}{\sqrt{5}\cdot 3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta_3 = \dfrac{-1+9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{4}{5}$

(2) まず，P_n と P_{n+8} は原点対称なので，$\cos\theta_{n+8} = \cos\theta_n$ が成立する。

また, y 軸に関する対称性より,

$$\cos\theta_4 = \cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta_5 = \cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta_6 = \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

さらに，$\cos\theta_7 = 0$ となり，(1)の結果と合わせると，すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k} = \cos\theta_n$ が成り立つような自然数 k の最小値は 8 である。

(3) θ_n が最小となるのは，$\cos\theta_n$ が最大のときである。

$0\leqq n\leqq 7$ において，$\cos\theta_n$ が最大であるのは, (1)(2)より,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta_4 = \cos\theta_5 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

周期性を考慮すると，θ_n が最小となるときの P_n は,

$P_1(1,\ 1)$，$P_2(1,\ 2)$，$P_4(0,\ 3)$，$P_5(-1,\ 3)$，$P_9(-1,\ -1)$，
$P_{10}(-1,\ -2)$，$P_{12}(0,\ -3)$，$P_{13}(1,\ -3)$

［解 説］

(2)の周期を求めるとき, 図から明らかに 8 であることはわかりますが, 同時に 7 以下の場合についての記述も必要です。

© 電送数学舎 2007