1

解答解説のページへ

p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

2

解答解説のページへ

勝つ確率が $p\,(0 \leqq p \leqq 1)$ のゲームに，保有ポイントの一部を賭けて参加する。このゲームには引き分けはなく，勝てば賭けたポイントがもどり，さらに賭けたポイントの 2 倍を得るが，負ければ賭けたポイントを失う。ポイントは正の実数であるとする。たとえば，10 ポイントを保有しているときに 1.5 ポイントを賭けると，勝てば保有ポイントは 13 となり，負ければ 8.5 となる。

このゲームに繰り返し参加するものとし，毎回その時点での保有ポイントの x 倍 $(0<x<1)$ を賭ける。たとえば，最初の保有ポイントが 10 で $x=0.1$ とすれば，最初は 1 ポイントを賭ける。勝てば保有ポイントが 12 となり，次回は 1.2 ポイントを賭ける。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　1 回の参加で勝った場合，負けた場合，それぞれの保有ポイントが何倍になるかを x を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた倍率の期待値を，x と p を用いて表せ。

(3)　$p=\dfrac{2}{5}$ とする。このゲームに 2 回参加した時点で，2 勝，1 勝，0 勝の中でどの確率が最も高いか。またその場合に保有ポイントが最大になる x の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$の値を求めよ。

(3) $2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ のとき，$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上に，円$C_1 : x^2 + y^2 = 1$，放物線$C_2 : y = x^2 + 5$がある。また点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$を円C_1上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$における円C_1の接線lの方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2) 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$における円C_1の接線 l が放物線C_2と共有点をもつときの，y_1の値の範囲を求めよ。

(3) 円C_1の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線C_2の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線C_2と接する点の座標を求めよ。

(4) (3)の 2 本の直線と放物線C_2で囲まれる図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n+\dfrac{q-p}{2}q^n$ に対して,

$$a_2=pa_1+\frac{q-p}{2}q^1=p+\frac{q-p}{2}q=\frac{2p-pq+q^2}{2}$$

$$a_3=pa_2+\frac{q-p}{2}q^2=p\cdot\frac{2p-pq+q^2}{2}+\frac{q-p}{2}q^2=\frac{2p^2-p^2q+q^3}{2}$$

$$a_4=pa_3+\frac{q-p}{2}q^3=p\cdot\frac{2p^2-p^2q+q^3}{2}+\frac{q-p}{2}q^3=\frac{2p^3-p^3q+q^4}{2}$$

(2)　(1)より，$a_n=\dfrac{2p^{n-1}-p^{n-1}q+q^n}{2}$ と推測でき，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{2p^0-p^0q+q}{2}=1$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{2p^{k-1}-p^{k-1}q+q^k}{2}$ と仮定する。

$$a_{k+1}=pa_k+\frac{q-p}{2}q^k=p\cdot\frac{2p^{k-1}-p^{k-1}q+q^k}{2}+\frac{q-p}{2}q^k=\frac{2p^k-p^kq+q^{k+1}}{2}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{2p^{n-1}-p^{n-1}q+q^n}{2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

［解 説］

推測→帰納法の誘導がついた漸化式の基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) まず, a ポイントを保有し, xa ポイントを賭けるとする。
勝ったときは，$a+2xa=(1+2x)a$ ポイントとなり，$1+2x$ 倍になる。
負けたときは，$a-xa=(1-x)a$ ポイントとなり，$1-x$ 倍になる。

(2) 倍率の期待値を E とすると,

$$E=(1+2x)p+(1-x)(1-p)=3xp-x+1$$

(3) $p=\frac{2}{5}$ のとき, 2 勝する確率は $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$, 1 勝 1 敗する確率は ${}_2\mathrm{C}_1\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$, 0 勝する確率は $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ である。

これより, 1 勝 1 敗する確率が最も高く，このとき保有ポイントの倍率は，勝→負, 負→勝のいずれの場合も,

$$(1+2x)(1-x)=-2x^2+x+1=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$x=\frac{1}{4}$ のとき，保有ポイントは最大になる。

［解 説］

長い問題文ですが，その文中に，親切に例が明示されていますので，誤解が生まれる余地はないでしょう。

3

問題のページへ

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ より，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

さて，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\cos\theta-\sin\theta<0$ となり，

$$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

(2)　(1)より，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ であり，

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{3}{5}$$

すると，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos 2\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin 2\theta\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{5}$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ のもとで，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq -1$ の解は，

$$\frac{2}{3}\pi\leqq 2\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

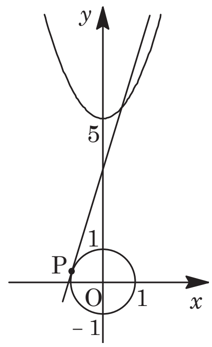
そこで，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ と変形すると，$(*)$のとき，最大値は $\sqrt{3}\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$，最小値は $0\left(\theta=\dfrac{5}{6}\pi\right)$ となる。

［解　説］

三角関数の式変形の問題です。なお, 3 つの問いの関係は考えずに解きました。

4

問題のページへ



(1)　$C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式は,

$$x_1x + y_1y = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　l と $C_2 : y = x^2 + 5 \cdots\cdots ②$ に対して,

②を①に代入すると, $x_1x + y_1(x^2 + 5) = 1$

$$y_1x^2 + x_1x + 5y_1 - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

(i)　$y_1 = 0$ のとき　$x_1 = \pm 1$ から, ③は実数解をもつ。

(ii)　$y_1 \neq 0$ のとき　③が実数解をもつ条件は,

$$D = {x_1}^2 - 4y_1(5y_1 - 1) = (1 - {y_1}^2) - 20{y_1}^2 + 4y_1$$

$$= -21{y_1}^2 + 4y_1 + 1 \geqq 0$$

よって, $(3y_1 - 1)(7y_1 + 1) \leqq 0$ から, $-\dfrac{1}{7} \leqq y_1 \leqq \dfrac{1}{3}$ $(y_1 \neq 0)$

(i)(ii)より, l と C_2 が共有点をもつ条件は, $-\dfrac{1}{7} \leqq y_1 \leqq \dfrac{1}{3}$ である。

(3)　l と C_2 が接するのは, ③が重解をもつ, すなわち $D = 0$ のときである。

このとき, $y_1 < 0$ となるのは $y_1 = -\dfrac{1}{7}$ であり, $x_1 = \pm\sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{7}\right)^2} = \pm\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

すると, ③の重解は, $x = \dfrac{-x_1}{2y_1} = \pm 2\sqrt{3}$ となり, このとき, ②より,

$$y = (\pm 2\sqrt{3})^2 + 5 = 17$$

よって, 円 C_1 の接線と放物線 C_2 と接する点の座標は, $(\pm 2\sqrt{3},\ 17)$ である。

(4)　(3)より, 円 C_1 の接線と C_2 は $x = \pm 2\sqrt{3}$ 接する。

そこで, 求める図形の面積を S とおくと, y 軸に関する対称性より,

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2\,dx = \frac{2}{3}\Big[(x - 2\sqrt{3})^3\Big]_0^{2\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{3})^3 = 16\sqrt{3}$$

[解　説]

微積分の基本問題です。空欄形式にすると, センター数ⅡB の第 2 問です。