

1

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\frac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 人のうち、少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。
- (2) a と b が等しくなる確率を求めよ。
- (3) 2 人が同じ数、他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。
- (4) $a < b < c$ となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

- (1) p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (2) $b_n = (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して、 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を 0 以上の実数, n を正の整数とするととき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$ が成り立つことを示せ。
- (3) $e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \frac{a^2 e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。

4

解答解説のページへ

 xy 平面の曲線

$$C : x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}, \quad y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C 上の $t = \theta$ に対応する点 $P\left(\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}, \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)$ における C の接線 l の方程式を求めよ。
- (2) $\alpha = \sin\theta + \cos\theta$ とおく。点 $P\left(\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}, \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)$ における C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。
- (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, (2) で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 3 人とも n を選ばない確率は $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ より、少なくとも 1 人が n を選ぶ確率は、

$$1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 = \frac{3n^2 - 3n + 1}{n^3}$$

- (2) $a = b$ となる確率は、 c が任意なので、 $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times 1 = \frac{1}{n}$

- (3) $a = b \neq c$ となる確率は、 $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$ である。

また、 $a = c \neq b$ 、 $b = c \neq a$ の場合の確率も、同じく $\frac{n-1}{n^2}$ となる。

よって、2 人が同じ数、他の 1 人が異なる数を選ぶ確率は、 $\frac{3(n-1)}{n^2}$ である。

- (4) $a < b < c$ となる場合は ${}_n C_3$ 通りあるので、その確率は、

$$\frac{{}_n C_3}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}$$

[解説]

不気味なほど基本的な設問 4 題で、構成されています。

2

問題のページへ

(1) 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^{n-1}$ を変形すると,

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}q^n = p\left(a_n - \frac{1}{2}q^{n-1}\right)$$

よって, $a_n - \frac{1}{2}q^{n-1} = \left(a_1 - \frac{1}{2}q^0\right)p^{n-1} = \frac{1}{2}p^{n-1}$ となり,

$$a_n = \frac{1}{2}p^{n-1} + \frac{1}{2}q^{n-1}$$

(2) $b_n = (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} = (-1)^{n-1} \{ \log(n+2) - \log n \}$ に対し, n を偶奇に分けて,

$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ を求める。 m を自然数とするとき,

(i) $n = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (b_1 + b_3 + \dots + b_{2m-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2m}) \\ &= -\log 1 + \log(2m+1) - \{ -\log 2 + \log(2m+2) \} \\ &= \log 2 + \log \frac{2m+1}{2m+2} = \log 2 + \log \left(1 - \frac{1}{2m+2}\right) \end{aligned}$$

これより, $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ より, $S_{2m} \rightarrow \log 2$

(ii) $n = 2m-1$ のとき

$$S_{2m-1} = S_{2m} - b_{2m} = S_{2m} + \log \frac{2m+2}{2m} = S_{2m} + \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

これより, $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ より, $S_{2m-1} \rightarrow \log 2$

(i)(ii)より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2$

[解説]

(1)については, 文系に推測→帰納法の誘導のついた類題が出ています。なお, 上記の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

(1) 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx &= -\left[e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a + \int_0^a e^{a-x} n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} dx \\ &= -\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n + e^a + \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2) $a \geq 0, n \geq 1$ より, $1 + \frac{a}{n} \geq 1$ となり, $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \text{また, } \textcircled{1} \text{ より, } e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx - \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{x}{n} - 1\right) dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^a x e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②③より, $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a \cdots \cdots \textcircled{4}$ (3) ④より, $0 \leq x \leq a$ において, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq e^x$ となり,

$$\frac{1}{n} \int_0^a x e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^a x e^{a-x} e^x dx = \frac{e^a}{n} \int_0^a x dx = \frac{a^2 e^a}{2n}$$

よって, ③から, $e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \frac{a^2 e^a}{2n}$ **[解説]**

定積分と不等式の証明問題です。細かく付いた誘導に従えば, 式変形の方角を見失うことはないでしょう。

4

問題のページへ

$$(1) \text{ まず, } x = \frac{\cos t}{1 - \sin t} \text{ より, } \frac{dx}{dt} = \frac{-\sin t(1 - \sin t) + \cos^2 t}{(1 - \sin t)^2} = \frac{1 - \sin t}{(1 - \sin t)^2} = \frac{1}{1 - \sin t}$$

$$\text{また, } y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \text{ より, } \frac{dy}{dt} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{1 - \cos t}$$

よって, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}$ となる。

さて, 点 $P\left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y - \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} \left(x - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}\right)$$

$$y = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} x + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ と } y \text{ 軸との交点の } y \text{ 座標は, } y = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \text{ となる。}$$

また, $\textcircled{1}$ と x 軸との交点の x 座標は,

$$-\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} x + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = 0, \quad x = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

すると, C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{2(1 - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta \cos \theta)}$$

ここで, $\alpha = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと, $\alpha^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より,

$$2 \sin \theta \cos \theta = \alpha^2 - 1$$

$$\text{よって, } S = \frac{\alpha^2}{2 - 2\alpha + \alpha^2 - 1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$(3) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より, } 1 < \alpha \leq \sqrt{2} \text{ となる。}$$

すると, $\frac{\alpha}{\alpha - 1} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}$ となり, $\textcircled{2}$ より,

$$S \geq (2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$$

[解説]

パラメータ曲線の接線についての基本問題です。計算量も少なめです。