1

解答解説のページへ

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3)　さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

2

解答解説のページへ

三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま，座標平面上の曲線 $K : y = \dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　三角形 ABC の垂心は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2)　三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。

3

解答解説のページへ

実数 x_i，a_i，b_i，c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ は，以下の条件(い)～(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i \geqq 0$，$b_i \geqq 0$，$c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$

(に)　$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,\quad y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,\quad y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$ を示せ。

(3)　$y_1 + y_2 \geqq x_1 + x_2$ を示せ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。

1

問題のページへ

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

(1) 回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

(i) 1回振ったとき　2

(ii) 2回振ったとき　$3\to6,\ 4\to4,\ 6\to3$

(iii) 3回振ったとき　$6\to6\to6$

(2) $P_4=P_0$ となるのは，4回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i) 回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は, $a\leqq b\leqq c\leqq d$ では,

$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 2)$

すると，目の出方は，$\frac{4!}{2!}+4!+\frac{4!}{3!}+1=41$ 通りとなる。

(ii) 回転した角の合計が 4π になるとき

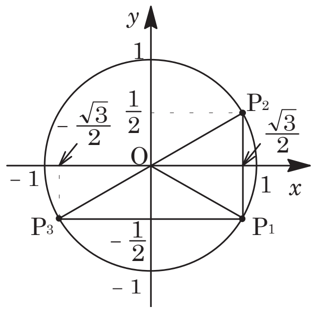
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで, 1通りである。

(i)(ii)より，$P_4=P_0$ となる目の出方は，$41+1=42$ 通りである。

(3) 条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2=\frac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ としても一般性は失わない。

そこで，O を中心とし，OP_2 を角 $\frac{\pi}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決めるとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ のとき，すなわち出た目 k が1のときである。



［解 説］

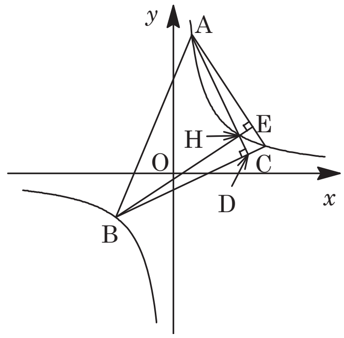
場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

2

問題のページへ

(1)　$A\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$B\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$C\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$に対し，

$$\overrightarrow{BC}=\left(c-b,\ \frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b-c}{bc}(bc,\ -1)$$



頂点 A から直線 BC に引いた垂線の足を D とすると，直線 AD は，

$$bc(x-a)-\left(y-\frac{1}{a}\right)=0$$

$$bcx-y=abc-\frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

同様に，頂点 B から直線 CA に引いた垂線の足を E とすると，直線 BE は，

$$cax-y=abc-\frac{1}{b}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$c(b-a)x=-\dfrac{b-a}{ab}$，$x=-\dfrac{1}{abc}$

①から，$y=bc\left(-\dfrac{1}{abc}\right)-abc+\dfrac{1}{a}=-abc$

よって，$H\left(-\dfrac{1}{abc},\ -abc\right)$となり, H は曲線$K$：$y=\dfrac{1}{x}$上にある。

(2)　(1)より，頂点 A から直線 BH に引いた垂線は AE，頂点 B から直線 AH に引いた垂線は BD となる。

これより，直線 AE と直線 BD の交点，すなわち点 C が△ABH の垂心である。

［解 説］

(2)は，(1)の結果を利用する方法もありますが，上のように垂心の定義を述べるだけでもよいでしょう。

3

問題のページへ

(1)　条件(は)より,

$$y_1+y_2+y_3=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)$$
$$=(a_1+b_1+c_1)x_1+(a_2+b_2+c_2)x_2+(a_3+b_3+c_3)x_3$$
$$=x_1+x_2+x_3$$

(2)　条件(い), (ろ), (に)より,

$$y_1-x_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-(a_1+a_2+a_3)x_1=a_2(x_2-x_1)+a_3(x_3-x_1)\geqq 0$$

よって，$y_1\geqq x_1$ である。

(3)　(2)と同様にして,

$$y_3-x_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3-(c_1+c_2+c_3)x_3=c_1(x_1-x_3)+c_2(x_2-x_3)\leqq 0$$

よって，$y_3\leqq x_3$ であり, (1)より,

$$y_1+y_2-(x_1+x_2)=x_1+x_2+x_3-y_3-(x_1+x_2)=x_3-y_3\geqq 0$$

以上より，$y_1+y_2\geqq x_1+x_2$ である。

［解 説］

文字がたくさんある不等式の証明です。ただ, 見かけほど難ではありません。

4

問題のページへ

x	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘	-18	↗

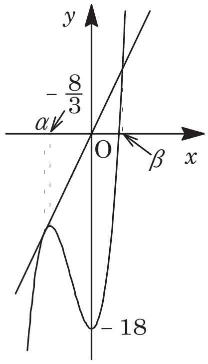
(1)　$x^3+4x^2 \leqq ax+18$ より，

$$x^3+4x^2-18 \leqq ax \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$f(x)=x^3+4x^2-18$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$$

ここで，$x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，$x \leqq 0$ のとき曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=ax$ の下方に位置することである。



さて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が，$x=\alpha$ で接し，$x=\beta$ で交わるとすると，

$$x^3+4x^2-ax-18=(x-\alpha)^2(x-\beta) \cdots\cdots\cdots ②$$

②の係数を比べると，

$$2\alpha+\beta=-4 \cdots\cdots\cdots ③,\quad \alpha^2+2\alpha\beta=-a \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\alpha^2\beta=18 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③⑤より，$\alpha^2(-4-2\alpha)=18$，$\alpha^3+2\alpha^2+9=0$

すると，$(\alpha+3)(\alpha^2-\alpha+3)=0$ となり，α は実数から，$\alpha=-3$ であり，

$$\beta=-4-2\cdot(-3)=2$$

④に代入して，$a=-\alpha^2-2\alpha\beta=3$

したがって，$x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，図より，$a \leqq 3$ である。

(2)　(1)より，$a_0=3$ となり，このとき不等式①は，

$$x^3+4x^2-3x-18 \leqq 0,\quad (x+3)^2(x-2) \leqq 0$$

よって，求める解は，$x \leqq 2$ である。

［解 説］

3 次関数のグラフを対応させて，3 次不等式の解を求める基本問題です。