1

解答解説のページへ

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1) さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

2

解答解説のページへ

2×2 行列 A と B が，条件 $A\neq O$，$B\neq O$，$AB=BA=O$ を満たしているとする。ただし，O は零行列を表す。このとき以下の問い(1)，(2)に答えよ。もし必要であれば，行列 $X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$X^2=(p+s)X-(ps-qr)E\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを使ってもよい。ただし，E は単位行列を表す。

(1) ある数 α，β に対して $A^2=\alpha A$，$B^2=\beta B$ となることを示せ。

(2) (1)において $\alpha=\beta=1$ のとき，$A+B=E$ を示せ。

3

解答解説のページへ

xを実数とし，次の無限級数を考える。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するようなxの範囲を求めよ。

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる x の関数を$f(x)$とかく。また，$h(x)=f\left(\sqrt{|x|}\right)-|x|$とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をαとするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$は存在するか。理由を付けて答えよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上に，$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ で与えられる曲線 $C: y=f(x)$ と，直線 $l: y=ax$（a は実数）を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を使ってもよい。

(2) C と l が第 1 象限で接するとき，C と l，および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

1

問題のページへ

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{\pi}{6}$

(1) 回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

(i) 1 回振ったとき　2

(ii) 2 回振ったとき　$3\to6,\ 4\to4,\ 6\to3$

(iii) 3 回振ったとき　$6\to6\to6$

(2) $P_4=P_0$ となるのは，4 回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i) 回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は, $a\leqq b\leqq c\leqq d$ では,

$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 2)$

すると，目の出方は，$\dfrac{4!}{2!}+4!+\dfrac{4!}{3!}+1=41$ 通りとなる。

(ii) 回転した角の合計が 4π になるとき

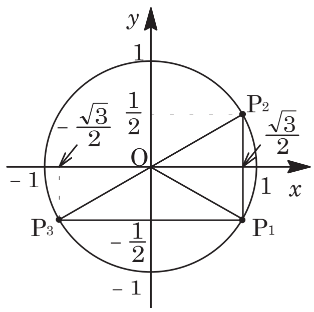
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで, 1 通りである。

(i)(ii)より，$P_4=P_0$ となる目の出方は，$41+1=42$ 通りである。

(3) 条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2=\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ としても一般性は失わない。

そこで，O を中心とし，OP_2 を角 $\dfrac{\pi}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決めるとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，すなわち出た目 k が 1 のときである。



［解 説］

場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

2

問題のページへ

(1)　条件より，行列 $X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して，$X^2=(p+s)X-(ps-qr)E$ ………(＊)

まず，A^{-1} の存在を仮定すると，$AB=O$ より，

$$A^{-1}AB=A^{-1}O\,,\ \ B=O$$

すると，これは $B\neq O$ に反することより，A^{-1} は存在しない。

これより，$\det A=0$ となり，行列 A の対角成分の和を α とすると, (＊)より,

$$A^2=\alpha A$$

同様にして，B^{-1} の存在を仮定すると，$BA=O$ より，

$$B^{-1}BA=B^{-1}O\,,\ \ A=O$$

すると，これは $A\neq O$ に反することより，B^{-1} は存在しない。

これより，$\det B=0$ となり，行列 B の対角成分の和を β とすると, (＊)より,

$$B^2=\beta B$$

(2)　条件より，$A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA=O$ から,

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+B$$

ここで，$X=A+B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$X^2=X$ ………①

また，$\alpha=\beta=1$ より，$p+s=\alpha+\beta=2$ となり, (＊)より,

$$X^2=2X-(ps-qr)E\ \text{………②}$$

①②より，$X=2X-(ps-qr)E$，$X=(ps-qr)E$

①に代入すると，$(ps-qr)^2=ps-qr$

ここで，$ps-qr=0$ と仮定すると $X=O$ となり，$p+s=2$ に反することから，$ps-qr\neq 0$ である。

したがって，$ps-qr=1$ となり，$X=E$ すなわち $A+B=E$ である。

［解 説］

行列の有名問題で，類題が数多く出ています。演習経験が必須の 1 題です。

3

問題のページへ

(1)　初項x^2，公比$\dfrac{1}{1+x^2-x^4}$である無限等比級数が収束する条件は，

(i)　初項が 0 のとき

$x^2=0$から，$x=0$

(ii)　公比の絶対値が 1 より小のとき

$\left|\dfrac{1}{1+x^2-x^4}\right|<1$から，$1<|1+x^2-x^4|$となり，$(1+x^2-x^4)^2>1$

$$\{(1+x^2-x^4)-1\}\{(1+x^2-x^4)+1\}>0,\ (x^4-x^2)(x^4-x^2-2)>0$$

$$x^2(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+1)>0$$

よって，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<0$，$0<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(i)(ii)より，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(2)　与えられた無限等比級数が収束するとき，その和$f(x)$は，$x\neq 0$では，

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2-x^4}}=\frac{x^2(1+x^2-x^4)}{x^2-x^4}=\frac{x^4-x^2-1}{x^2-1}$$

ここで，$h(x)=f(\sqrt{|x|})-|x|$より，

$$h(x)=\frac{x^2-|x|-1}{|x|-1}-|x|=\frac{(x^2-|x|-1)-(x^2-|x|)}{|x|-1}=-\frac{1}{|x|-1}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)=1$である。

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{|x|-1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-|x|}{x(|x|-1)}$より，

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to +0}\frac{-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x(-x-1)}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{-x-1}=-1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$は存在しない。

［解 説］

無限等比級数の収束条件についての基本問題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ に対して，

$$f'(x)=2e^{1-\frac{1}{2}x}+2(x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

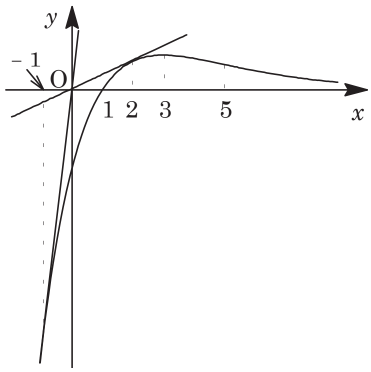
$$=(3-x)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-e^{1-\frac{1}{2}x}+(3-x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{1}{2}(x-5)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－		－
$f''(x)$	－		－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↘

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，グラフの概形は右図のようになる。



さて，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(x-t)$$

原点を通る条件は，

$$-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(-t)$$

$$2(t-1)=t(3-t),\quad t^2-t-2=0,\quad (t+1)(t-2)=0$$

よって，接点の x 座標は $t=-1,\ 2$ となり，接線の傾きは，それぞれ

$$f'(-1)=4e^{\frac{3}{2}},\quad f'(2)=1$$

以上より，$C: y=f(x)$ と $l: y=ax$ が 2 個の共有点をもつ a の条件は，図から，

$$0<a<1,\quad 4e^{\frac{3}{2}}<a$$

(2)　$a=1$ のとき，接点は $(2,\ 2)$ より，$C,\ l$，および x 軸で囲まれた領域の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\int_1^2 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx=2-2\Big[-2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}\Big]_1^2-4\int_1^2 e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=2+4-4\Big[-2e^{1-\frac{1}{2}x}\Big]_1^2=6+8(1-\sqrt{e})=14-8\sqrt{e}$$

［解　説］

(1)では，定数 a を分離して条件を求めようかと考えましたが，(2)の設問まで考え合わせると，上の方法に落ち着きました。