$\boxed{1}$

解答解説のページへ

男性M_1, …, M_4の 4 人と女性F_1, …, F_4の 4 人が, 横一列に並んだ座席S_1, …, S_8に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1)の座り方の中で, M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3) (1)の座り方の中で, M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。

2

解答解説のページへ

自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1 \diamond 1 = 4$，$1 \diamond 2 = 6$，$2 \diamond 1 = 9$，$4 \diamond 2 = 33$，$5 \diamond 3 = 56$，$1 \diamond 6 = 14$，$6 \diamond 1 = 49$ である。

(1)　数列 $8 \diamond 1$，$8 \diamond 2$，$8 \diamond 3$，……の初項 $8 \diamond 1$ から第 25 項 $8 \diamond 25$ までの和を求めよ。

(2)　$m \diamond n = 474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a = b = 1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を $a,\ b$ を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

a を正の実数とする。放物線 $P: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1)　$b+c=2a$ であることを示せ。

(2)　放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　男性が S_1，S_3，S_5，S_7 に座る場合，S_2，S_4，S_6，S_8 に座る場合があるので，同性どうしが隣り合わない座り方は，

$\boxed{S_1}$ $\boxed{S_2}$ $\boxed{S_3}$ $\boxed{S_4}$ $\boxed{S_5}$ $\boxed{S_6}$ $\boxed{S_7}$ $\boxed{S_8}$

$$2\times 4!\times 4! = 1152 \text{（通り）}$$

(2)　まず，M_1 の座席は S_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7 のいずれかであり，また F_1 と F_2 については $F_1\ M_1\ F_2$ の場合と $F_2\ M_1\ F_1$ の 2 つの場合がある。さらに，残りの男性 3 人，女性 2 人の座り方を合わせて考えると，M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は，

$$6\times 2\times 3!\times 2! = 144 \text{（通り）}$$

(3)　まず，M_1 と F_1 が隣り合う座り方を考える。

(i)　M_1 が S_1 または S_8 に座るとき

F_1 の座席は 1 通りに決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$2\times 1\times 3!\times 3! = 72 \text{（通り）}$$

(ii)　M_1 が S_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7 のいずれかに座るとき

F_1 の座席は 2 通りずつ決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$6\times 2\times 3!\times 3! = 432 \text{（通り）}$$

(i)(ii)より，M_1 と F_1 が隣り合う座り方は，$72+432=504$ 通りとなる。

よって，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は，(1)の結論を用いると，

$$1152-504=648 \text{（通り）}$$

［解　説］

順列の基本問題です。(3)では，図を描いて，直接的に数えても大差はありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　条件より，$m \diamond n = (m+1)^2 + 2m(n-1)$ なので，

$$8 \diamond 1 + 8 \diamond 2 + \cdots + 8 \diamond 25 = \sum_{n=1}^{25} \{ 9^2 + 16(n-1) \} = \frac{81+465}{2} \times 25 = 6825$$

(2)　$m \diamond n = 474$ から，$(m+1)^2 + 2m(n-1) = 474$ となり，

$$m^2 + 2mn - 473 = 0,\ \ m(m+2n) = 473 \cdots\cdots\cdots (*)$$

さて，$473 = 11 \times 43$ より，$(*)$を満たす自然数 $m,\ n$ は，$m < m+2n$ から，

$$(m,\ m+2n) = (1,\ 473),\ (11,\ 43)$$

よって，$(m,\ n) = (1,\ 236),\ (11,\ 16)$

［解　説］

中学入試のような問題です。常識的な感覚で規則性を見つければよいのでしょう。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 方程式$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0$ $(a\neq 0)$……①に対して，$a=b=1$のとき，

$$x^3+2x^2+2x+1=0,\ (x+1)(x^2+x+1)=0$$

$x^2+x+1=0$は実数解をもたないので，①の実数解は$x=-1$である。

(2) まず，①より，$(x+1)(ax^2+x+b)=0$………②

ここで，②より，$f(x)=ax^2+x+b$おくと，①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつのは，次の 2 つの場合がある。

(i) $f(x)=0$が異なる 2 つの実数解をもち，その一方が$x=-1$であるとき

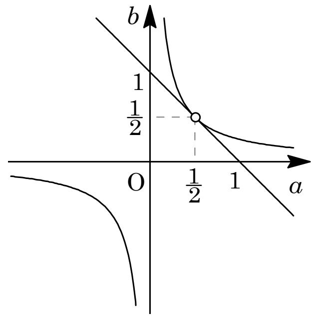
$$D=1-4ab>0,\ f(-1)=a-1+b=0$$

よって，$ab<\dfrac{1}{4}$，$a+b=1$

(ii) $f(x)=0$が$x\neq-1$である重解をもつとき

$$D=1-4ab=0,\ f(-1)=a-1+b\neq 0$$

よって，$ab=\dfrac{1}{4}$，$a+b\neq 1$



(i)(ii)より，ab 平面上で図示すると，右図のようになる。

よって，求める条件は，$a\neq 0$を考え合わせて，

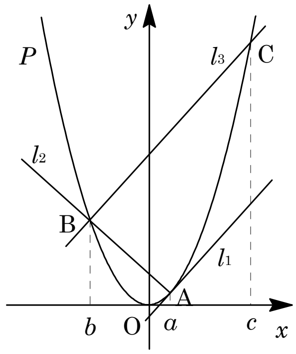
$$a+b=1,\ ab=\frac{1}{4},\ (a,\ b)\neq\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (a,\ b)\neq(0,\ 1)$$

［解 説］

私大の入試によく見かける問題です。条件がやや複雑なので，まとめる際に，図を用いています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$P: y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$ となり，

$$l_2 : y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x^2 - a^2 = -\dfrac{1}{2a}(x-a)$

$x \neq a$ の解は，$x + a = -\dfrac{1}{2a}$，$x = -a - \dfrac{1}{2a}$ となり，

$$b = -a - \frac{1}{2a} \cdots\cdots\cdots ③$$

また，$l_3 : y - b^2 = 2a(x-b)$ より，

$$y = 2ax - 2ab + b^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

①④を連立して，$x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0$ ………⑤

⑤の解が，$x = b$，c より，解と係数の関係を用いると，$b + c = 2a$ ………⑥

(2)　P と l_3 で囲まれた部分の面積 S は，③⑥を用いると，

$$S = \int_b^c (2ax - 2ab + b^2 - x^2)\,dx = -\int_b^c (x-b)(x-c)\,dx = \frac{1}{6}(c-b)^3$$

$$= \frac{1}{6}(2a - b - b)^3 = \frac{4}{3}(a-b)^3 = \frac{4}{3}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^3$$

ここで, $a > 0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$2a + \frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

なお，等号は $2a = \dfrac{1}{2a}$ $\left(a = \dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

よって，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{4}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3}$ をとる。

［解 説］

放物線と直線に囲まれた部分の面積を求める典型題です。