

1

解答解説のページへ

男性 M_1, \dots, M_4 の 4 人と女性 F_1, \dots, F_4 の 4 人が、横一列に並んだ座席 S_1, \dots, S_8 に座る場合を考える。

- (1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。
- (2) (1)の座り方の中で、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。
- (3) (1)の座り方の中で、 M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。

2

解答解説のページへ

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数 n に対して

$$X \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成り立つように、行列 X を定めよ。

(2) 自然数 n に対して $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$ の値を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

3

解答解説のページへ

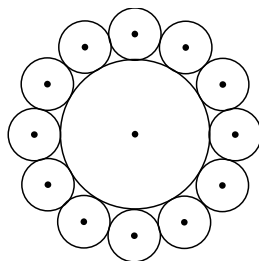
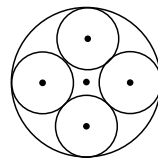
原点を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を C_2 とする。 C_1 上に点 $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ があり、また C_2 上に点 $P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta, \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)$ がある。ただし、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとする。線分 P_1P_2 の中点を Q とし、点 Q の原点からの距離を $r(\theta)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の x 座標のとりうる範囲を求めよ。
- (2) 点 Q が y 軸上にあるときの θ の値を α とする。このとき、 α および定積分 $\int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し、その一つの円の半径を R_n とする。また、円 C に内接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の円

例1 $n = 12$ の場合例2 $n = 4$ の場合

を図（例 2）のように配置し、その一つの円の半径を r_n とする。ただし、 $n \geq 3$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) R_6, r_6 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。

1

問題のページへ

- (1) 男性が S_1, S_3, S_5, S_7 に座る場合, S_2, S_4, S_6, S_8 に座る場合があるので, 同性どうしが隣り合わない座り方は,
- $$2 \times 4! \times 4! = 1152 \quad (\text{通り})$$
- (2) まず, M_1 の座席は $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ のいずれかであり, また F_1 と F_2 については $F_1 M_1 F_2$ の場合と $F_2 M_1 F_1$ の 2 つの場合がある。さらに, 残りの男性 3 人, 女性 2 人の座り方を合わせて考えると, M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は,
- $$6 \times 2 \times 3! \times 2! = 144 \quad (\text{通り})$$
- (3) まず, M_1 と F_1 が隣り合う座り方を考える。
- (i) M_1 が S_1 または S_8 に座るとき
- F_1 の座席は 1 通りに決まるので, 残り男性 3 人, 女性 3 人の座り方を考えて,
- $$2 \times 1 \times 3! \times 3! = 72 \quad (\text{通り})$$
- (ii) M_1 が $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ のいずれかに座るとき
- F_1 の座席は 2 通りずつ決まるので, 残り男性 3 人, 女性 3 人の座り方を考えて,
- $$6 \times 2 \times 3! \times 3! = 432 \quad (\text{通り})$$
- (i)(ii)より, M_1 と F_1 が隣り合う座り方は, $72 + 432 = 504$ 通りとなる。
- よって, M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は, (1) の結論を用いると,
- $$1152 - 504 = 648 \quad (\text{通り})$$

[解説]

順列の基本問題です。(3)では, 図を描いて, 直接的に数えても大差はありません。

2

問題のページへ

- (1)
- $a_1 = 1$
- ,
- $a_2 = 3$
- ,
- $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
- より,
- $a_3 = 4$
- ,
- $a_4 = 7$
- となるので, 条件から,

$$X \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

逆に, ①のとき, $a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$ も合わせて, すべての自然数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

- (2)
- $d_n = a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$
- とおいて, ②の両辺の行列式をとると,

$$(-1)d_n = d_{n+1}, \quad d_{n+1} = -d_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, $d_1 = a_1 a_3 - (a_2)^2 = -5$, $d_2 = a_2 a_4 - (a_3)^2 = 5$ より, $d_n = 5(-1)^n$ と推測できる。以下, この式を数学的帰納法によって証明する。(i) $n=1$ のとき $d_1 = -5$ より成立している。(ii) $n=k$ のとき $d_k = 5(-1)^k$ であると仮定する。

$$\textcircled{3} \text{より, } d_{k+1} = -d_k = -5(-1)^k = 5(-1)^{k+1}$$

これより, $n=k+1$ のときも成立する。(i)(ii)より, 自然数 n に対して, $d_n = a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2 = 5(-1)^n$ である。

[解 説]

漸化式と行列の融合問題です。(2)は, 問題文の指示に従いました。

3

問題のページへ

- (1) 2点
- $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$
- ,
- $P_2(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta)$
- に対して,

線分 P_1P_2 の中点を $Q(x, y)$ とおくと,

$$x = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると, 3倍角の公式を用いて, ①より,

$$x = \frac{1}{2} \cos \theta + \cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta = \cos^3 \theta - \frac{1}{4} \cos \theta$$

ここで, $t = \cos \theta$ とおくと, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ から $0 < t \leq 1$ であり, $x = t^3 - \frac{1}{4}t \cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - \frac{1}{4} = 3\left(t + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

すると, x の値の増減は右表のようになり, 点 Q の x 座標のとりうる範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq x \leq \frac{3}{4}$$

t	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{6}$...	1
$\frac{dx}{dt}$		-	0	+	
x	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{36}$	↗	$\frac{3}{4}$

- (2)
- $0 < t \leq 1$
- において,
- $x = 0$
- となるのは, ③より
- $t = \frac{1}{2}$
- のときであり,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$$

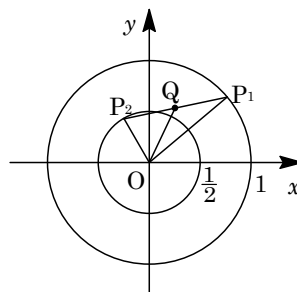
すると, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ となり, $r(\theta) = OQ$ なので, ①②から,

$$\begin{aligned} \{r(\theta)\}^2 &= \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} (\cos \theta \cos 3\theta + \sin \theta \sin 3\theta) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cos 2\theta\right) d\theta = \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{8} \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{5}{48} \pi + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{48} \pi + \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

[解説]

微積分の融合問題です。計算量は少なめです。



4

問題のページへ

- (1) 右図において、 $\angle A_1CA_2 = \frac{\pi}{3}$ であり、

$$CA_1 = CA_2 = 1 + R_6, \quad A_1A_2 = 2R_6$$

よって、 $R_6 = (1 + R_6) \sin \frac{\pi}{6}$ となり、

$$2R_6 = 1 + R_6, \quad R_6 = 1$$

また、 $\angle B_1CB_2 = \frac{\pi}{3}$ であり、

$$CB_1 = CB_2 = 1 - r_6, \quad B_1B_2 = 2r_6$$

よって、 $r_6 = (1 - r_6) \sin \frac{\pi}{6}$ となり、 $2r_6 = 1 - r_6, \quad r_6 = \frac{1}{3}$

- (2) (1)と同様に考えると、

$$R_n = (1 + R_n) \sin \frac{\pi}{n}, \quad R_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$r_n = (1 - r_n) \sin \frac{\pi}{n}, \quad r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\text{よって、} R_n - r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$$

ここで、 $\theta = \frac{\pi}{n}$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\theta \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{\theta^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\pi^2}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 = 2\pi^2$$

[解説]

よく見かける 2 円の内接・外接を題材にした問題です。

