1

解答解説のページへ

空間内に点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 2)$ がある。点 P は O から出発し，1 回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1) P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2) さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3) (2)と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点 $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10}を求めよ。

(2)　nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3)　a_nを3で割ったときの余りを求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) P の軌跡が円となることを示せ。

(2) (1)の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。A, B が条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる $s,\ t$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3)　2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4)　2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　点 P が x 軸, y 軸, z 軸正の方向に長さ 1 だけ移動することを, X, Y, Z と表す。

　さて, P が O から A へ移動する最短経路は, X を 2 個, Y を 2 個, Z を 2 個並べる順列に対応するので, $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 通りある。

(2)　点 P が x 軸, y 軸, z 軸正の方向に長さ 1 だけ移動する確率は, それぞれ $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{6}$ より, 6 回移動後, P が A に到達する確率は, (1)より,

$$90\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{72}$$

(3)　P が O から B へ移動する最短経路は, X を 1 個, Y を 1 個, Z を 1 個並べる順列に対応する。また, B から A へ移動する場合も同じなので, P が B を通って A に到達する確率は,

$$\left\{3!\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

［解　説］

確率の基本題です。教科書の例に載っているような問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=0$ から，$a_2=2a_1=0$，$a_3=a_2+1=1$，$a_4=2a_3=2$，

$a_5=a_4+1=3$，$a_6=2a_5=6$，$a_7=a_6+1=7$，$a_8=2a_7=14$，

$a_9=a_8+1=15$，$a_{10}=2a_9=30$

(2)　まず，$n+4$ と n の偶奇は一致し，

(i)　n が奇数の場合

$$a_{n+4}=a_{n+3}+1=2a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2a_{n+1}+3$$
$$=2\cdot 2a_n+3=4a_n+3\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　n が偶数の場合

$$a_{n+4}=2a_{n+3}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2=2\cdot 2a_{n+1}+2=4a_{n+1}+2$$
$$=4(a_n+1)+2=4a_n+6\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①より $a_{n+4}=3(a_n+1)+a_n$，②より $a_{n+4}=3(a_n+2)+a_n$

これより，n の偶奇にかかわらず，a_{n+4} を 3 で割ったときの余りは，a_n を 3 で割ったときの余りに一致する。

すると，$a_1=a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=2$ から，a_n を 3 で割ったときの余り r_n は，k を 0 以上の整数として，

$$r_n=0\ (n=4k+1,\ 4k+2),\ r_n=1\ (n=4k+3),\ r_n=2\ (n=4k+4)$$

［解 説］

誘導に乗っていけば結論まで到達します。漸化式に整数を融合した頻出問題です。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|^2&=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\end{aligned}$$

P の軌跡は，中心の位置ベクトルが $\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，半径が $\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ の円となる。

(2)　円の中心が C より，(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

(3)　(1)より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\right|=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$

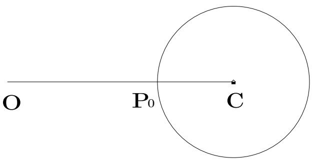
また，条件より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}<0$ となり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=\frac{1}{16}(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2)=-\frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\right|^2=\frac{1}{16}(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2)=-\frac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=9\left|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\right|^2$ となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\right|$

すると，O，$\mathrm{P_0}$，C は，この順に同一直線上にあることより，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって，$s=\frac{1}{6}$，$t=-\frac{1}{3}$

［解　説］

(1)では，与えられた式を「因数分解」して直径の両端のベクトル表示を求めるという方法もあります。(2)の設問をみると，出題者はこの解法を予測したのではないかと思えます。

4　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+x^2+px+1$ より，$f'(x)=3x^2+2x+p$

条件から，$f'(x)=1$，すなわち $3x^2+2x+p-1=0$ ……(＊)は，異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$D/4=1-3(p-1)=-3p+4>0,\quad p<\frac{4}{3}$$

(2)　(＊)の実数解が α，β より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=\dfrac{p-1}{3}$ となり，

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}(p-1)=\frac{4(4-3p)}{9}$$

(3)　接線の方程式は，その傾きが 1 より，$y-f(\alpha)=x-\alpha$，$y-f(\beta)=x-\beta$

これより，y 軸との交点は，$\mathrm{A}(0,\ f(\alpha)-\alpha)$，$\mathrm{B}(0,\ f(\beta)-\beta)$ となり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=|(f(\alpha)-\alpha)-(f(\beta)-\beta)|=|\alpha^3-\beta^3+\alpha^2-\beta^2+(p-1)(\alpha-\beta)|\\&=|\alpha-\beta||(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta+(\alpha+\beta)+(p-1)|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\left|\frac{4(4-3p)}{9}+(p-1)-\frac{2}{3}+(p-1)\right|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\cdot\frac{2}{9}|3p-4|=\frac{4}{27}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3\end{aligned}$$

(4)　2 つの接線は，傾きがともに 1 より，その距離は $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$ となり，条件から，

$$\frac{4}{27\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3=\frac{8}{27},\quad \left(\sqrt{4-3p}\right)^3=2\sqrt{2}$$

よって，$4-3p=2$ から，$p=\dfrac{2}{3}$ である。

［解 説］

接線についての基本題です。この問題も丁寧な誘導つきです。