

1

解答解説のページへ

$t$  を実数とする。行列  $A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在することを示せ。
- (2)  $A + A^{-1}$ ,  $A - A^{-1}$ ,  $(A - A^{-1})^2$  を求めよ。
- (3)  $A^{2n} - tA^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が  $n$  によらない行列になるという。このときの  $t$  の値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

$n$  を 3 以上の整数とする。  $3n$  枚のカードに 1 から  $3n$  までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

- (1) 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。
- (2) 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。
- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。

**3**

解答解説のページへ

$n$  を自然数とする。曲線  $y = x^2(1-x)^n$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と  $x$  軸とで囲まれる図形の面積を  $S_n$  とする。

- (1)  $S_n$  を求めよ。
- (2)  $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

$f(x) = e^{-x^2}$  とする。曲線  $y = f(x)$  上の点  $A(a, f(a))$  における接線を  $l$ 、原点  $O$  を通り  $l$  に垂直な直線を  $l'$  とし、 $l$  と  $l'$  との交点を  $P$  とする。

- (1) 線分  $OP$  の長さを求めよ。
- (2)  $l$  と  $y$  軸との交点を  $Q$  とし、 $\angle POQ$  を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とする。 $\sin \theta$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた  $\sin \theta$  を最大にする  $a$  の値と、そのときの  $\sin \theta$  の値を求めよ。

1

問題のページへ

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix} \text{ に対して, } \det A = t(2-t) - (t-1)(1-t) = 1 \neq 0$$

よって, 逆行列  $A^{-1}$  が存在する。

$$(2) \quad (1) \text{ より, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \text{ となり, } A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix} = 2(t-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - A^{-1})^2 = 4(t-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad B = A + A^{-1}, \quad C = A - A^{-1} \text{ とおくと, } A = \frac{1}{2}(B + C)$$

また, 単位行列を  $E$ , 零行列を  $O$  とすると, (1) より,  $B = 2E$ ,  $C^2 = O$  となり,

$$BC = (A + A^{-1})(A - A^{-1}) = A^2 - AA^{-1} + A^{-1}A - (A^{-1})^2 = A^2 - (A^{-1})^2$$

$$CB = (A - A^{-1})(A + A^{-1}) = A^2 + AA^{-1} - A^{-1}A - (A^{-1})^2 = A^2 - (A^{-1})^2$$

すると,  $BC = CB$  となり, 二項定理を利用すると,  $n \geq 2$  で,

$$A^n = \frac{1}{2^n}(B^n + nB^{n-1}C) = \frac{1}{2^n}(2^n E + n \cdot 2^{n-1}C) = E + \frac{n}{2}C$$

なお, この式は,  $n=1$  のときも成り立ち,

$$A^{2n} - tA^n = (E + nC) - t(E + \frac{n}{2}C) = (1-t)E + \frac{n}{2}(2-t)C \cdots \cdots (*)$$

(\*) が  $n$  によらない行列になる条件は,  $2-t=0$  または  $C=O$  である。

すなわち,  $t=2, 1$  である。

### [解説]

行列の  $n$  乗に関する頻出タイプの問題です。  $C^2 = O$  から, (3) の方針を決めました。

2

問題のページへ

- (1)
- $3n$
- 枚のカードから 3 枚を取り出す
- ${}_{3n}C_3$
- 通りが同様に確からしいとする。

ここで、3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は  ${}_nC_3$  通りより、その確率は、

$$\frac{{}_nC_3}{{}_{3n}C_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

- (2) まず、
- $3n$
- 枚のカードを、書かれた数字によって、次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち、書かれた数字が 3 の倍数の  $n$  枚のカード、(3 の倍数+1)の  $n$  枚のカード、(3 の倍数+2)の  $n$  枚のカードである。

すると、3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは、同じタイプから 3 枚を取り出す  ${}_nC_3 \times 3$  通り、3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す  $({}_nC_1)^3 = n^3$  通りの場合がある。これより、その確率は、

$$\frac{3{}_nC_3 + n^3}{{}_{3n}C_3} = \frac{3n(n-1)(n-2) + 6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{(3n-1)(3n-2)}$$

- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率
- $p_1$
- は、余事象を考えて、

$$p_1 = 1 - \frac{{}_{2n}C_3}{{}_{3n}C_3}$$

また、3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率  $p_2$  は、(2)より、

$$p_2 = 1 - \frac{3{}_nC_3 + n^3}{{}_{3n}C_3}$$

これより、 $p_1 - p_2 = -\frac{{}_{2n}C_3}{{}_{3n}C_3} + \frac{3{}_nC_3 + n^3}{{}_{3n}C_3}$  となり、

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) {}_{3n}C_3 &= -\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2) + \frac{3}{6}n(n-1)(n-2) + n^3 \\ &= \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) > 0 \end{aligned}$$

よって、 $p_1 > p_2$  から、積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

### [解説]

確率の基本問題です。なお、(2)の分類方法は必須事項です。

3

問題のページへ

- (1)  $0 \leq x \leq 1$  において,  $y = x^2(1-x)^n \geq 0$  より, この曲線と  $x$  軸とで囲まれる図形の面積  $S_n$  は,  $1-x=t$  とおいて,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 x^2(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^2 t^n (-dt) = \int_0^1 (1-2t+t^2)t^n dt \\ &= \int_0^1 (t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}) dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+2}}{n+2} + \frac{t^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

- (2) (1)から,  $S_n = \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$  となり,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{6}$$

### [解説]

積分と極限の融合の形式ですが, 内容や計算は平易です。

4

問題のページへ

(1)  $f(x) = e^{-x^2}$  より,  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

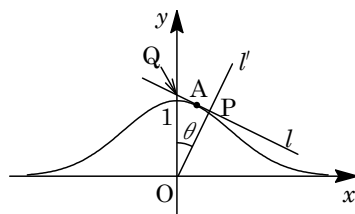
さて, 点  $A(a, f(a))$  における接線  $l$  は,

$$y - e^{-a^2} = -2ae^{-a^2}(x - a)$$

$$2ae^{-a^2}x + y - (2a^2 + 1)e^{-a^2} = 0$$

線分  $OP$  の長さは, 原点  $O$  と直線  $l$  の距離より,

$$OP = \frac{(2a^2 + 1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2} + 1}} = \frac{2a^2 + 1}{\sqrt{4a^2 + e^{2a^2}}}$$



- (2) 直線
- $l$
- の法線ベクトルの成分が,
- $(2ae^{-a^2}, 1) = e^{-a^2}(2a, e^{a^2})$
- より,
- $\overrightarrow{OP}$
- と同じ向きのベクトルを
- $\vec{u} = (2a, e^{a^2})$
- とし, また
- $\overrightarrow{OQ}$
- と同じ向きのベクトルを
- $\vec{v} = (0, 1)$
- とすると,
- $\vec{u}$
- と
- $\vec{v}$
- のなす角
- $\theta$
- は,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{e^{a^2}}{\sqrt{4a^2 + e^{2a^2}}}$$

よって,  $\sin^2 \theta = 1 - \frac{e^{2a^2}}{4a^2 + e^{2a^2}} = \frac{4a^2}{4a^2 + e^{2a^2}}$  となり,  $0 \leq \theta \leq \pi$  から,

$$\sin \theta = \frac{2|a|}{\sqrt{4a^2 + e^{2a^2}}}$$

- (3)
- $t = 2a^2 \geq 0$
- とおき,
- $g(t) = \frac{2t}{2t + e^t}$
- とすると, (2) より,
- $\sin \theta = \sqrt{g(t)}$
- となる。

$$g'(t) = \frac{2(2t + e^t) - 2t(2 + e^t)}{(2t + e^t)^2}$$

$$= \frac{2(1 - t)e^t}{(2t + e^t)^2}$$

$t$	0	...	1	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{2+e}$	$\searrow$

右表より,  $g(t)$  は,  $t = 1$  のとき最大値  $\frac{2}{2+e}$  をとる。よって,  $\sin \theta$  が最大となるのは,  $2a^2 = 1$  から  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  のときであり,  $\sin \theta$  の最大値は  $\sqrt{\frac{2}{2+e}}$  である。

## [解説]

計算がやや難の部分もありますが, 微分についての標準的な問題です。