$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

a を正の定数とし, x, y に関する次の不等式を考える。

$$3y \geqq 5x \cdots\cdots\cdots①,\ 4y \geqq 7a \cdots\cdots\cdots②,\ x - y \geqq 3 - a \cdots\cdots\cdots③$$

(1) ①, ②を同時に満たす点$(x,\ y)$のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) ①, ②, ③を同時に満たす実数の組$(x,\ y)$が存在するような a の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

正 n 角形の頂点を A_0，A_1，…，A_{n-1} とする。頂点 A_1，A_2，…，A_{n-1} から 2 点をとり，それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n，そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6 および b_6 を求めよ。

(2)　整数 $m \geqq 3$ に対し，$S = \sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ。

(3)　b_9 を求めよ。

３

解答解説のページへ

四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1) 線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2) 線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

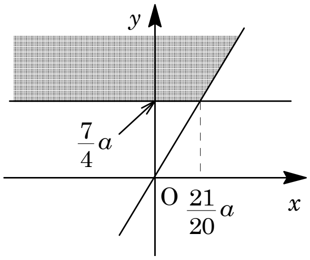
4

解答解説のページへ

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$f(a) = \displaystyle\int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right| dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$3y \geqq 5x$ ……①，$4y \geqq 7a$ ……②より，

$$y \geqq \frac{5}{3}x\,,\ \ y \geqq \frac{7}{4}a$$

①②を連立して，$\frac{5}{3}x = \frac{7}{4}a$ から，$x = \frac{21}{20}a$

よって，①，②を同時に満たす点$(x,\ y)$のなす領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　$x - y \geqq 3 - a$ ……③より，$y \leqq x + a - 3$ となり，①，②，③を同時に満たす実数の組$(x,\ y)$が存在する条件は，(1)より，点$\left(\frac{21}{20}a,\ \frac{7}{4}a\right)$が③を満たすことであり，

$$\frac{21}{20}a - \frac{7}{4}a \geqq 3 - a\,,\ \ \frac{3}{10}a \geqq 3$$

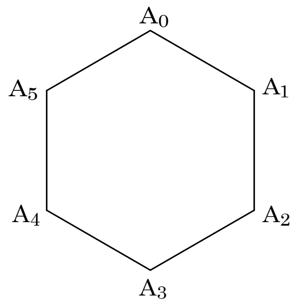
よって，$a \geqq 10$ である。

［解　説］

領域の基本問題です。場合分けも必要ありません。

2

問題のページへ



(1)　正六角形の頂点 A_1，A_2，…，A_5 から 2 点をとると三角形ができるので，その総数は，

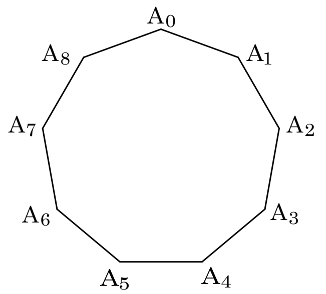
$$a_6 = {}_5C_2 = 10$$

また，二等辺三角形は，$(A_0,\ A_1,\ A_2)$，$(A_0,\ A_1,\ A_5)$，$(A_0,\ A_2,\ A_4)$，$(A_0,\ A_4,\ A_5)$ と選べばよいので，

$$b_6 = 4$$

(2)　正 n 角形の頂点 A_1，A_2，…，A_{n-1} から 2 点をとると三角形ができるので，その総数は $a_n = {}_{n-1}C_2$ となり，

$$S = \sum_{k=3}^{m} a_k = {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{m-1}C_2$$
$$= {}_2C_2 + ({}_4C_3 - {}_3C_3) + ({}_5C_3 - {}_4C_3) + \cdots + ({}_mC_3 - {}_{m-1}C_3)$$
$$= 1 - {}_3C_3 + {}_mC_3 = {}_mC_3 = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$



(3)　正九角形において，頂点 A_0 と A_1，A_2，…，A_8 から 2 点をとってできる三角形が二等辺三角形となるのは，

$(A_0,\ A_1,\ A_2)$，$(A_0,\ A_1,\ A_5)$，$(A_0,\ A_1,\ A_8)$
$(A_0,\ A_2,\ A_4)$，$(A_0,\ A_2,\ A_7)$，$(A_0,\ A_3,\ A_6)$
$(A_0,\ A_4,\ A_5)$，$(A_0,\ A_4,\ A_8)$，$(A_0,\ A_5,\ A_7)$
$(A_0,\ A_7,\ A_8)$

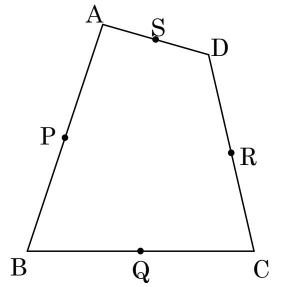
よって，$b_9 = 10$ である。

［解　説］

(2)は，公式 ${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_{r+1} + {}_nC_r$ より，${}_nC_r = {}_{n+1}C_{r+1} - {}_nC_{r+1}$ を利用しています。普通にシグマ計算をしても構いません。なお，(3)は列挙した方が早いと思い，そのようにしました。

3

問題のページへ



(1)　A, B, C, D, P, Q, R, S の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とおくと，条件より，

$$\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\ \vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{s}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{a})$$

さらに，線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{k}$，$\vec{l}$ とおくと，

$$\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{r})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{l}=\frac{1}{2}(\vec{q}+\vec{s})=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})$$

よって，$\vec{k}=\vec{l}$ から，点 K と点 L は一致する。

(2)　まず，線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{m}$，$\vec{n}$ とおくと，

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}),\ \vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$$

ここで，線分 MN の中点 X の位置ベクトルを $\vec{x}$ とおくと，

$$\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d})$$

よって，$\vec{x}=\vec{k}$ から，点 X と点 K は一致，すなわち直線 MN は点 K を通る。

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。対称性から位置ベクトルを設定しています。

4

問題のページへ

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$2 \leqq 3-a \leqq 3$ となり，$0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$|(x-a)(x-3+a)| = \begin{cases} (x-a)(x-3+a) & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-a)(x-3+a) & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

これより，$f(a) = \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)|dx$

$$= \int_0^a (x-a)(x-3+a)dx + \int_a^1 -(x-a)(x-3+a)dx$$

$$= \int_0^a (x^2-3x+3a-a^2)dx - \int_a^1 (x^2-3x+3a-a^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a-a^2)x\right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a-a^2)x\right]_a^1$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + (3a-a^2)a - \frac{1-a^3}{3} + \frac{3}{2}(1-a^2) - (3a-a^2)(1-a)$$

$$= -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 - 3a + \frac{7}{6}$$

$$f'(a) = -4a^2 + 8a - 3$$
$$= -(2a-1)(2a-3)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は最大値 $\frac{7}{6}$ $(a=0)$，最小値 $\frac{1}{2}$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$

［解　説］

微積分の基本的な計算問題です。