$\boxed{1}$　解答解説のページへ

O を原点とする座標平面における曲線 $C: \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1)　C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2)　点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

表の出る確率が p, 裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で, $p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

とし, D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し, 硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み, 裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお, この規則で D 上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3) $P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき, p の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$，$C_2 : y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

(1) $t>0$ の範囲で，関数 $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の共有点の個数を求めよ。

(3) C_1，C_2 の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

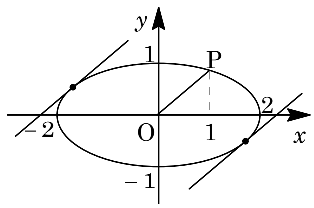
(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。

1

問題のページへ



(1) $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の接点を，$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

接線の方程式は，$\dfrac{2x\cos\theta}{4}+y\sin\theta=1$ から，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の法線ベクトルは $\vec{n}=(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となり，条件より $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は垂直なので，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ から，

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0,\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$ となり，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，OP に平行な接線の方程式は，$(*)$から，

$$x\cos\frac{5}{6}\pi+2y\sin\frac{5}{6}\pi=2,\ x\cos\frac{11}{6}\pi+2y\sin\frac{11}{6}\pi=2$$

したがって，$-\sqrt{3}x+2y=4$，$\sqrt{3}x-2y=4$ である。

(2) $\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき接点は，それぞれ $\mathrm{Q_1}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q_2}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

ここで，点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積が最大値をとるのは，Q における接線と OP が平行である点 $\mathrm{Q_1}$ または $\mathrm{Q_2}$ においてである。

$$\triangle\mathrm{OPQ_1}=\frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\right|=1,\ \triangle\mathrm{OPQ_2}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\right|=1$$

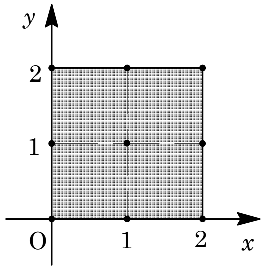
以上より，△OPQ の面積の最大値は 1 となり，このとき点 Q の座標は，$\mathrm{Q}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ または $\mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

［解　説］

上の解答例以外に，y 軸方向に 2 倍拡大して，楕円 C を円 $x^2+y^2=4$ に対応させる解法もあります。この方法では，計算は暗算程度になります。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　表の出る確率が p, 裏の出る確率が q である硬貨を 4 回投げて, Q が点$(2,\ 2)$に到達するには, 表が 2 回, 裏が 2 回出る場合より, その確率 P_4 は,

$$P_4 = {}_4\mathrm{C}_2 p^2q^2 = 6p^2q^2$$

(2)　硬貨を 5 回投げて, Q が 5 回目に初めて点$(2,\ 2)$に到達するには,

(i)　4 回目に点$(2,\ 1)$に到達するとき

4 回目までに表 3 回, 裏 1 回出て, 5 回目に裏が出る場合より, その確率は,

$$ {}_4\mathrm{C}_3 p^3q\times q = 4p^3q^2$$

(ii)　4 回目に点$(1,\ 2)$に到達するとき

4 回目までに表 1 回, 裏 3 回出て, 5 回目に表が出る場合より, その確率は,

$$ {}_4\mathrm{C}_1 pq^3\times p = 4p^2q^3$$

(i)(ii)より, $P_5 = 4p^3q^2 + 4p^2q^3 = 4p^2q^2(p+q) = 4p^2q^2$

(3)　$P_5 = \dfrac{1}{9}$ より, (2)から $4p^2q^2 = \dfrac{1}{9}$ となり, $6pq = 1$ であるので,

$$6p(1-p) = 1,\ 6p^2 - 6p + 1 = 0$$

よって, $p = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ となり, この値はともに $0 < p < 1$ を満たしている。

［解 説］

確率の基本的な問題です。ただ, 設問(3)の意図は何でしょうか。

3

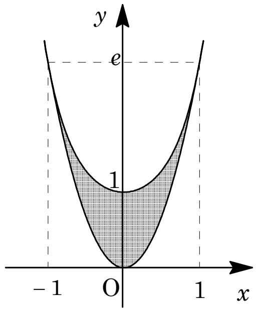
問題のページへ

(1)　$f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ に対して，$f'(t)=\dfrac{te^t-e^t}{t^2}=\dfrac{(t-1)e^t}{t^2}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	∞	↘	e	↗	∞

　$t>0$ において，$f(t)$ の値の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=1$ のとき最小値 e をとる。

(2)　$C_1: y=e^{x^2}$，$C_2: y=ax^2$ を連立して，$e^{x^2}=ax^2$ ………①



　①は $x=0$ を解としてもたないので，$\dfrac{e^{x^2}}{x^2}=a$ と同値であり，さらに $t=x^2>0$ とおきかえると，

$$\frac{e^t}{t}=a,\ f(t)=a\quad (t>0)\ \cdots\cdots\cdots②$$

　すると，(1)より，②の異なる解 t の個数は，$a>e$ のとき 2 個，$a=e$ のとき 1 個，$0<a<e$ のとき 0 個である。

　よって，①の異なる解 x の個数，すなわち C_1，C_2 の共有点の個数は，$a>e$ のとき 4 個，$a=e$ のとき 2 個，$0<a<e$ のとき 0 個である。

(3)　(2)より，C_1，C_2 の共有点が 2 個となるのは $a=e$ のときで，このとき共有点は $t=1$ から $x=\pm1$ である。

　また，C_1，C_2 の y 軸に関する対称性より，この 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^1 2\pi x(e^{x^2}-ex^2)\,dx=2\pi\int_0^1(xe^{x^2}-ex^3)\,dx$$

$$=2\pi\Big[\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{e}{4}x^4\Big]_0^1=\pi(e-1)-\frac{\pi e}{2}=\frac{\pi(e-2)}{2}$$

［解 説］

(1)は(2)の誘導となっています。また，(3)の求積は円筒分割によりましたが，普通に y 軸方向に積分しても，計算量はほとんど変わりません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=4x(1-x)$ に対して，条件より，

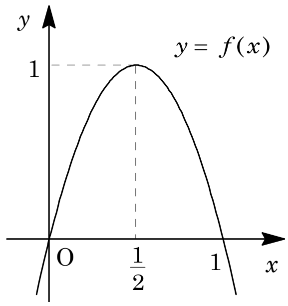
$$f_2(x)=f_1(f(x))=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))$$

すると，$f_2(x)=0$ の解は，

(i)　$f(x)=0$ のとき　$x=0,\ 1$

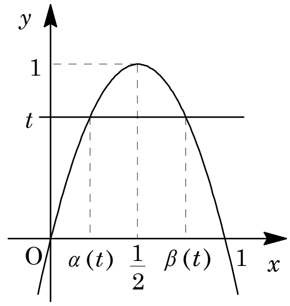
(ii)　$f(x)=1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$



(2)　$0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対して，$f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$　$(\alpha(t)<\beta(t))$ とすると，

$$0\leqq\alpha(t)<\frac{1}{2}<\beta(t)\leqq 1$$



さて，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))$ より，$0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たす c に対して，

$$f_{n+1}(\alpha(c))=f_n(f(\alpha(c)))=f_n(c)=0$$

$$f_{n+1}(\beta(c))=f_n(f(\beta(c)))=f_n(c)=0$$

よって，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(3)　まず，$x=0,\ 1$ が $f_n(x)=0$ の解であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=4x(1-x)$ より，$x=0,\ 1$ は $f_1(x)=0$ の解である。

(ii)　$n=k$ のとき　$x=0,\ 1$ が $f_k(x)=0$ の解であると仮定すると，

$$f_{k+1}(0)=f_k(f(0))=f_k(0)=0,\quad f_{k+1}(1)=f_k(f(1))=f_k(0)=0$$

$x=0,\ 1$ は $f_{k+1}(x)=0$ の解である。

(i)(ii)より，$x=0,\ 1$ は，ともに $f_n(x)=0$ の解である。

さて，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，$f_n(x)=0$ の異なる S_n 個の解を，

$$0=c_1<c_2<c_3<\cdots<c_{S_n-1}<c_{S_n}=1$$

すると，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))=0$ の解は，$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1},\ c_{S_n}$ より求めることができる。

(a)　$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1}$ のとき

(2)より，$\alpha(c_i)$，$\beta(c_i)$　$(1\leqq i\leqq S_n-1)$ は，$f_{n+1}(x)=0$ の異なる解となり，その個数は $2(S_n-1)$ である。ただし，$0\leqq\alpha(c_i)<\dfrac{1}{2}<\beta(c_i)\leqq 1$ である。

(b)　$f(x)=c_{S_n}$ のとき

$f(x)=1$ より $x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1}{2}$ が $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(a)(b)より，$f_n(x)=0$ の異なる解の個数 S_n について，$S_1=2$ で，

$$S_{n+1}=2(S_n-1)+1,\quad S_{n+1}=2S_n-1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を$S_{n+1}-1=2(S_n-1)$と変形すると，$S_n-1=(S_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$となり，

$$S_n=2^{n-1}+1$$

［解　説］

合成関数の解の個数を題材としたおもしろい問題です。(1)と(2)が秀逸な誘導となっています。$n=1,\ 2,\ 3$と具体的に考えて方針を立てましたが，解答例の記述には，かなり難航しました。