1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 整数 x, y が $25x-31y=1$ を満たすとき，$x-5$ は 31 の倍数であることを示せ。

(2) $1\leqq y\leqq 100$ とする。このとき，不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(2)　X_n が k である確率 q_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(3)　X_n の期待値を $n=2$ の場合に求めよ。

(4)　X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2)　$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3)　点 P が曲線 $y=x^3-1\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　方程式$25x-31y=1$……①を満たす整数$(x,\ y)$として$(5,\ 4)$をとると,

$$25\cdot5-31\cdot4=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $25(x-5)-31(y-4)=0$, $25(x-5)=31(y-4)$………③

ここで, 25 と 31 は互いに素なので, ③より$x-5$は 31 の倍数である。

(2)　不等式 $0\leqq25x-31y\leqq1$……④を満たす整数$(x,\ y)$に対して,

(i)　$25x-31y=1$のとき

(1)より, kを整数として, $x-5=31k$, $y-4=25k$

$x=5+31k$, $y=4+25k$

$1\leqq y\leqq100$より, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$となり,

$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (36,\ 29),\ (67,\ 54),\ (98,\ 79)$

(ii)　$25x-31y=0$のとき

$25x=31y$より, lを整数として, $x=31l$, $y=25l$

$1\leqq y\leqq100$より, $l=1,\ 2,\ 3,\ 4$となり,

$(x,\ y)=(31,\ 25),\ (62,\ 50),\ (93,\ 75),\ (124,\ 100)$

(i)(ii)より, ④を満たす整数$(x,\ y)$は,

$(5,\ 4),\ (31,\ 25),\ (36,\ 29),\ (62,\ 50),\ (67,\ 54),\ (93,\ 75),\ (98,\ 79),$
$(124,\ 100)$

［解　説］

不定方程式の有名問題です。このタイプは, 新課程の数 A の教科書には記載されていて, 先取りのような扱いとなっています。

2　問題のページへ

(1)　$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ 上の点 $(a,\ b)$ があれば,

$$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$$

これより, $|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ となり, 点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2)　(1)より, 図形 T は x 軸対称となるので, 以下, $y\geqq 0$ で考えると,

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\ y=|x-3|-2|x+3|$$

(i)　$x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると, $y\geqq 0$ より, $-9\leqq x<3$ となる。

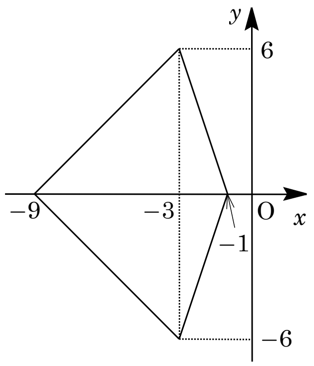
(ii)　$-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると, $y\geqq 0$ より, $-3\leqq x\leqq -1$ となる。

(iii)　$x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき, $y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。



(i)～(iii)の結果をもとに, x 軸対称すると図形 T は右図のようになり, 囲まれる領域の面積 S は,

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$

［解　説］

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

3

問題のページへ

(1)　1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおくとき，$X_n \leqq k$ となる確率 p_k は，$p_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n$ である。

(2)　$X_n = k$ となる確率 q_k は，$k \geqq 2$ のとき，

$$q_k = p_k - p_{k-1} = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$k=1$ のとき，$q_1 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ となるが，$(*)$に $k=1$ をあてはめた値に一致する。

(3)　$n=2$ のとき，$q_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^2 = \dfrac{2k-1}{36}$

X_n の期待値を E_n とおくと，

$$E_2 = \sum_{k=1}^{6} k\cdot\frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}(2k^2-k) = \frac{1}{36}\left(2\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right) = \frac{161}{36}$$

(4)　$$E_n = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} = \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= 6 - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^n = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

これより，n の値が増加すると E_n の値は増加する。

ここで，(3)より，$E_2 = \dfrac{161}{36} < 4.5$ であり，

$$E_3 = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 6 - \frac{25}{24} > 4.5$$

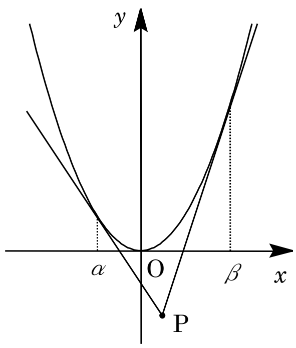
よって，E_n が 4.5 以上となる n の範囲は，$n \geqq 3$ である。

［解　説］

期待値についての標準的な問題です。(4)は(3)の値が誘導になっています。なお，シグマ計算において少し工夫をしていますが，そのまま計算しても構いません。

4

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ より $y'=2x$ となり，C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線は，$y-t^2=2t(x-t)$，$y=2tx-t^2$ ………①

ここで，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，①が通過することより，

$$b=2ta-t^2,\ t^2-2at+b=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

点 P は領域 $y<x^2$ にあることより $b<a^2$ であり，これから②の判別式 $D/4=a^2-b>0$ となるので，②は異なる 2 実数解をもつ。これを $x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=2a\ ,\ \alpha\beta=b$$

よって，点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ である。

(2)　(1)より，2 つの接線は，$y=2\alpha x-\alpha^2$，$y=2\beta x-\beta^2$ となり，この 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

(3)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が $y=x^3-1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くので，$b=a^3-1\ (-1\leqq a\leqq 1)$ となり，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4b=4a^2-4(a^3-1)=-4a^3+4a^2+4$$

ここで，$f(a)=-4a^3+4a^2+4$ とおくと，

$$f'(a)=-4(3a^2-2a)$$
$$=-4a(3a-2)$$

すると，$-1\leqq a\leqq 1$ における $f(a)$ の値の増減は，右表のようになる。

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$	12	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\dfrac{124}{27}$	$\searrow$	4

これより，$(\beta-\alpha)^2$ のとりうる値の範囲は，$4\leqq(\beta-\alpha)^2\leqq 12$ である。

さて，(2)より，$S=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{12}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ となるので，S が最大値をとるのは，$a=-1$，$b=-2$ のときから $\mathrm{P}(-1,\ -2)$ である。

また，S が最小値をとるのは，$a=0$ ，$b=-1$ または $a=1$，$b=0$ のときから $\mathrm{P}(0,\ -1)$ または $\mathrm{P}(1,\ 0)$ である。

［解　説］

放物線と接線についての超頻出の問題です。誘導も細かく付けられています。