1

解答解説のページへ

曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定まる座標平面上の 1 次変換を f とする。ただし, a, b は実数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 原点 O とは異なる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を f で移した点を Q とする。このとき, 長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ は P によらないことを示し, その値を a, b を用いて表せ。

(2) 正の整数 n に対して, $A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とするとき,

$$p_n{}^2+r_n{}^2=(a^2+b^2)^n,\ \ q_n{}^2+s_n{}^2=(a^2+b^2)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) $109^2=l^2+m^2$ を満たす正の整数 l, m を 1 組求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ を

$$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A}) = 2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) 点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

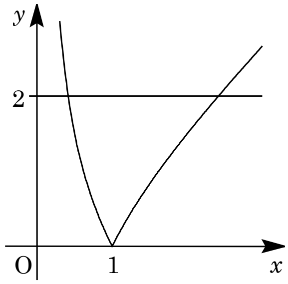
xy 平面において，点$(1,\ 2)$を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a \neq 0$ とする。

1

問題のページへ



曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ ……(＊)に対して,

(i)　$x \geqq 1$ のとき　$y=x-\dfrac{1}{x}$

$y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0$ より単調に増加する。

(ii)　$0<x<1$ のとき　$y=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-x+\dfrac{1}{x}$

(i)(ii)より, (＊)の概形は右図のようになり, 直線 $y=2$ と 2 つの交点をもつ。

さて, 曲線(＊)の方程式を x について解き直すと,

(i)　$x \geqq 1$ のとき　$y=x-\dfrac{1}{x}$ より, $x^2-yx-1=0$ となり,

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

(ii)　$0<x<1$ のとき　$y=-x+\dfrac{1}{x}$ より, $x^2+yx-1=0$ となり,

$$x=\frac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

よって, 曲線(＊)と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S は,

$$S=\int_0^2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}-\frac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)dy=\int_0^2 y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=2$$

［解 説］

交点の x 座標がややこしいので, y 軸方向に積分して面積を求めました。もっとも, x 軸方向に積分しても, それほどではありませんでしたが。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x',\ y')$とおくと，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$より，

$$x'^2 + y'^2 = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

よって，$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$

(2)　$A^{n+1} = A\cdot A^n$ より，

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ r_{n+1} & s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap_n - br_n & aq_n - bs_n \\ bp_n + ar_n & bq_n + as_n \end{pmatrix}$$

すると，${p_{n+1}}^2 + {r_{n+1}}^2 = (ap_n - br_n)^2 + (bp_n + ar_n)^2 = (a^2+b^2)({p_n}^2 + {r_n}^2)$から，

$${p_n}^2 + {r_n}^2 = ({p_1}^2 + {r_1}^2)(a^2+b^2)^{n-1} = (a^2+b^2)(a^2+b^2)^{n-1} = (a^2+b^2)^n$$

また，${q_{n+1}}^2 + {s_{n+1}}^2 = (aq_n - bs_n)^2 + (bq_n + as_n)^2 = (a^2+b^2)({q_n}^2 + {s_n}^2)$から，

$${q_n}^2 + {s_n}^2 = ({q_1}^2 + {s_1}^2)(a^2+b^2)^{n-1} = (b^2+a^2)(a^2+b^2)^{n-1} = (a^2+b^2)^n$$

(3)　$10^2 + 3^2 = 109$なので$a = 10$，$b = 3$とおき，さらに$n = 2$とすると，(2)より，

$${p_2}^2 + {r_2}^2 = (10^2+3^2)^2 = 109^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 & -60 \\ 60 & 91 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$109^2 = l^2 + m^2$を満たす正の整数として，$l = 91$，$m = 60$がある。

［解 説］

行列の n 乗に整数問題を組み合わせた問題です。なお，行列 A の表す 1 次変換は，回転と拡大の合成です。この点に着目する解答例も可能です。

3　　　　　問題のページへ

(1)　Q$(x,\ y)$とおくと，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T上に点$(a,\ b)$があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$から，点$(a,\ -b)$もT上にある。

(2)　(1)より，図形Tはx軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\ y=|x-3|-2|x+3|$$

(i)　$x<-3$のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$より，$-9\leqq x<3$となる。

(ii)　$-3\leqq x<3$のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$より，$-3\leqq x\leqq -1$となる。

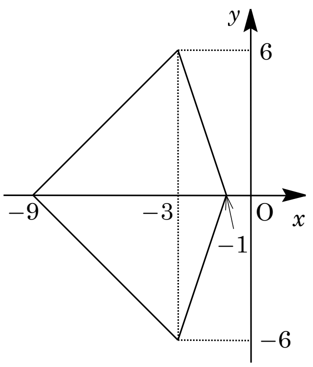
(iii)　$x\geqq 3$のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$を満たすxは存在しない。

(i)～(iii)の結果をもとに，x 軸対称すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積Sは，

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$



(3)　D$(x,\ y)$が図形T上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$より，

$$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$が最小となるのは，$x+y$が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$の場合である。

これより，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$の最小値は，$21-(-3+6)=18$である。

［解 説］

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。なお，設問形式は一見，異なりますが，(2)までは文理共通です。

4　問題のページへ

(1)　点$(1,\ 2)$を通る傾きtの直線lは，$y-2=t(x-1)$，$y=tx-t+2$ ………①

また，原点を通り，lに垂直な直線は，$x+ty=0$ ………②

①②を連立して，$x+t(tx-t+2)=0$，$(t^2+1)x=t^2-2t$

$$x=\frac{t^2-2t}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}-t+2=\frac{-t+2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，①②の交点Pの座標は，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{t^2-2t}{t^2+1},\ \dfrac{-t+2}{t^2+1}\Big)$となる。

(2)　③④で表される点Pの軌跡と2次曲線$2x^2-ay=0$……⑤を連立して，

$$2\Big(\frac{t^2-2t}{t^2+1}\Big)^2-a\cdot\frac{-t+2}{t^2+1}=0,\quad 2t^2(t-2)^2+a(t-2)(t^2+1)=0$$

$$(t-2)\{2t^3-4t^2+a(t^2+1)\}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，点Pの軌跡と曲線⑤が3点のみを共有する条件は，⑥が異なる実数解を3つだけもつことに対応する。ここで，$2t^3-4t^2+a(t^2+1)=0$ ……⑦が解$t=2$をもつときは$a=0$となり不適となり，⑦が$t\neq2$である実数解を2つだけもつ条件を求めると，

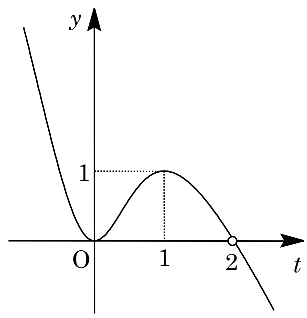
$$a=-\frac{2t^3-4t^2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	0	↗	1	↘

さて，$f(t)=-\dfrac{2t^3-4t^2}{t^2+1}$とおくと，

$$f'(t)=-\frac{(6t^2-8t)(t^2+1)-(2t^3-4t^2)\cdot2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2t^4+6t^2-8t}{(t^2+1)^2}=-\frac{2t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$



$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=-\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\infty$より，$y=f(t)$のグラフは右図のようになり，⑧が$t\neq2$である2実数解をもつ条件は，$a=1$である。

このとき，⑦は，$2t^3-3t^2+1=0$，$(t-1)^2(2t+1)=0$となるので，⑥の実数解は，$t=2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}$となる。

すると，③④より，3つの共有点の座標は，$t=2$のとき$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$t=1$のとき$(x,\ y)=\Big(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\Big)$，$t=-\dfrac{1}{2}$のとき$(x,\ y)=(1,\ 2)$である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，点Pの軌跡は，原点と点$(1,\ 2)$を直径の両端とする円(ただし点$(1,\ 0)$を除く)となり，tの値と点Pの位置は1対1に対応します。