1　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　nに関する数学的帰納法で，$a_n > 0$であることを証明せよ。

(2)　$b_n = \dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3)　a_nを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において, AB の中点を P, PC の中点を Q, OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし, $m>0$, $n>0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m, n を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$ を m, n を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$$

と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。

4　解答解説のページへ

A と B が続けて試合を行い，先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q，引き分ける確率を$1-p-q$とする。

(1) 3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2) 5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3) $p=q=\dfrac{1}{3}$としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4) $p=q=\dfrac{1}{2}$としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$ ……①を満たす数列$\{a_n\}$に対して，数学的帰納法により，$a_n>0$を示す。

(i) $n=1$のとき　$a_1=1>0$より成立。

(ii) $n=k$のとき　$a_k>0$とすると，①より，

$a_{k+1}-a_k=a_k(5-a_{k+1})$，$(a_k+1)a_{k+1}=6a_k$ ………②

すると，$a_k+1>0$，$6a_k>0$より$a_{k+1}>0$

(i)(ii)より，任意の自然数nに対して，$a_n>0$である。

(2) $a_n>0$なので，②より，$a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$となり，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6a_n}$

すると，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$から，$b_{n+1}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}b_n$ ………③

(3) $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$で，③より，$b_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{1}{5}\right)$となり，

$$b_n-\frac{1}{5}=\left(b_1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

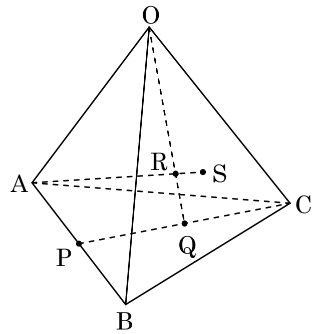
よって，$b_n=\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{6^{n-1}+4}{5\cdot 6^{n-1}}$から，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{5\cdot 6^{n-1}}{6^{n-1}+4}$

［解 説］

誘導つきで漸化式を解く問題です。ただ，著名なタイプですので，誘導なしで出題されることもあります。

2

問題のページへ



(1)　AB の中点を P, PC の中点を Q とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

(2)　OQ を $m:n$ に内分する点を R とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{m}{4(m+n)}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

また, 点 S は直線 AR 上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\vec{a}+t\left\{\frac{m}{4(m+n)}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})-\vec{a}\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{mt}{4(m+n)}-t\right\}\vec{a}+\frac{mt}{4(m+n)}(\vec{b}+2\vec{c})$$

さらに, 点 S は平面 OBC 上にあるので, $1+\dfrac{mt}{4(m+n)}-t=0$ となり,

$$4(m+n)+mt-4(m+n)t=0,\quad t=\frac{4(m+n)}{3m+4n}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{m}{4(m+n)}\cdot\dfrac{4(m+n)}{3m+4n}(\vec{b}+2\vec{c})=\dfrac{m}{3m+4n}(\vec{b}+2\vec{c})$

(3)　(2)より, $\mathrm{AR}:\mathrm{RS}=1:(t-1)=1:\left\{\dfrac{4(m+n)}{3m+4n}-1\right\}=(3m+4n):m$ より,

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}=\frac{3m+4n}{m}$$

［解　説］

空間ベクトルの応用問題です。まったく同じ構図で, 毎年, かなり出題されている超頻出のものです。

3

問題のページへ

(1) $f(x)-x=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x=(x-[x])-(x-[x])^2$

ここで，$t=x-[x]$ とおくと，$0\leqq t<1$ となり，

$$f(x)-x=t-t^2=t(1-t)\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq x$ （等号は x が整数のとき成立）

(2) $n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x+1]=n+1$ となり，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\&=n+1+2(x+1-n-1)-(x+1-n-1)^2\\&=n+2(x-n)-(x-n)^2+1=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\&=f(x)+1\end{aligned}$$

(3) (i) $0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$ より，

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

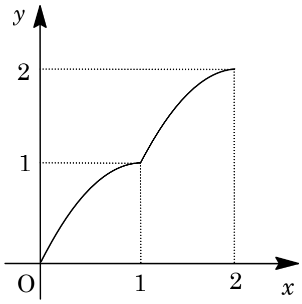
(ii) $1\leqq x<2$ のとき　(2)より，$f(x)=f(x-1)+1$

すると，$0\leqq x-1<1$ より，

$$f(x)=-(x-1-1)^2+1+1=-(x-2)^2+2$$

(iii) $x=2$ のとき　(1)より，$f(x)=2$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4) $0\leqq a<1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{a+1}f(x)dx=\int_0^a\{f(x)+1\}dx=\int_0^a f(x)dx+a$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1}f(x)dx&=\int_a^1 f(x)dx+\int_1^{a+1}f(x)dx\\&=\int_a^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx+a=\int_0^1 f(x)dx+a\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1+a=a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

［解 説］

ガウス記号のついた関数が題材で，誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については，(3)のグラフから面積を対応させて計算していますが，内容的には置換積分となっています。文系では範囲外ですが。

4

問題のページへ

(1)　3 試合目で優勝が決まるのは，A が 3 連勝または B が 3 連勝の場合より，その確率は，p^3+q^3 である。

(2)　5 試合目で優勝が決まるのは，次の場合である。

(i)　4 回目まで A が 2 回勝ち，5 回目に A が勝つとき
この確率は，${}_4\mathrm{C}_2p^2(1-p)^2\cdot p=6p^3(1-p)^2$

(ii)　4 回目まで B が 2 回勝ち，5 回目に B が勝つとき
この確率は，${}_4\mathrm{C}_2q^2(1-q)^2\cdot q=6q^3(1-q)^2$

(i)(ii)より，5 試合目で優勝が決まる確率は，$6p^3(1-p)^2+6q^3(1-q)^2$ である。

(3)　$p=q=1-p-q=\dfrac{1}{3}$ のとき，(1)(2)より，

(i)　3 試合目で優勝が決まる確率　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{2}{27}$

(ii)　4 試合目で優勝が決まる確率　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

(iii)　5 試合目で優勝が決まる確率　$6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$

(i)～(iii)より，5 試合目までに優勝が決まる確率は，$\dfrac{2}{27}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{34}{81}$ となる。

これより，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率は，

$$1-\frac{34}{81}=\frac{47}{81}$$

(4)　$p=q=\dfrac{1}{2}$ のとき，引き分けがないことより，5 試合目までに優勝が決まる。

(i)　3 試合目で優勝が決まる確率　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

(ii)　4 試合目で優勝が決まる確率　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{8}$

(iii)　5 試合目で優勝が決まる確率　$6\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+6\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{3}{8}$

(i)～(iii)より，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値 E は，

$$E=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$$

［解　説］

優勝までの回数の期待値という有名な問題です。(3)では，最初，場合分けを試みたのですが，すぐ引き返して(2)までの結果を利用することにしました。