1

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とし，a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1 \geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ を f で移した点 Q の座標を求めよ。

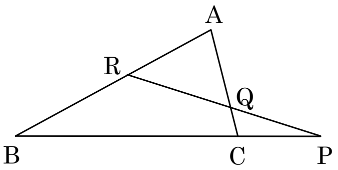
(2)　不等式 $a_1 \leqq x \leqq a_2$，$b_1 \leqq y \leqq b_2$ の表す領域を T とする。$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1)で求めた点 Q が領域 T に入るとする。T の面積が最小となるときの a_1，a_2，b_1，b_2 を求めよ。

(3)　不等式 $(x-2)^2+(y-4)^2 \leqq r^2$ の表す領域を H とする。$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1)で求めた点 Q が領域 H に入るとする。このとき，正の数 r の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

三角形 ABC において，$AB = BC = 2$，$CA = 1$ とする。$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ $CP = AQ = x$ となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1) AR を x の関数として表せ。

(2) (1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$1 \leqq a < b < c \leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組は,

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$ （通り）

(2)　$a' = a$，$b' = b+1$，$c' = c+2$ とおくとき，$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組の数は，$1 \leqq a' < b' < c' \leqq n+2$ を満たす a'，b'，c' の組の数に等しいので,

$${}_{n+2}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(n+2)(n+1)n$$ （通り）

(3)　$a < b$ かつ $a \leqq c$ となる場合の数は，次の通りである。

(i)　$1 \leqq a < b < c \leqq n$ のとき　(1)より，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(ii)　$1 \leqq a < b = c \leqq n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(iii)　$1 \leqq a < c < b \leqq n$ のとき　(i)と同様に，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(iv)　$1 \leqq a = c < b \leqq n$ のとき　(ii)と同様に，$\frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(i)～(iv)より，求める場合の数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \times 2 + \frac{1}{2}n(n-1) \times 2 = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$ （通り）

［解　説］

場合の数の典型問題です。(3)は(1)を利用して場合分けをしました。

2

問題のページへ

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと，

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより，すべての実数 y に対して $F\geqq 0$ が成立する条件は，

$$(1-a^2)x^2+2bx+1\geqq 0$$

さらに，$G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき，すべての実数 x に対して $G\geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0\ (a=\pm 1)$ のとき

$G=2bx+1$ より，求める条件は $b=0$ である。

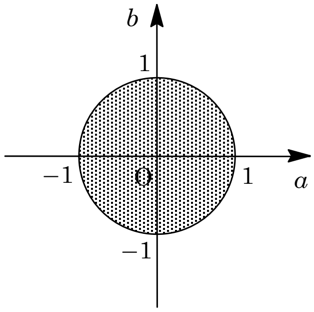
(ii)　$1-a^2\neq 0\ (a\neq\pm 1)$ のとき

$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より，求める条件は，

$1-a^2>0$ ………①，$-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1\geqq 0$ ………②

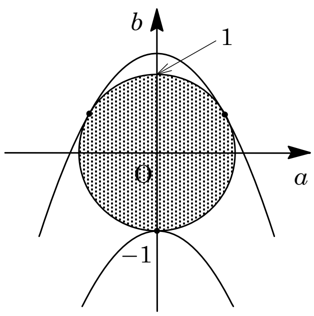
①②より，$a^2+b^2\leqq 1\ (-1<a<1)$

(i)(ii)より，実数 $a,\ b$ が満たすべき条件は，$a^2+b^2\leqq 1$ となり，点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$a^2+b=k$ とおくと，$b=-a^2+k$ ………③

右図より，$(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき，k は最小値 -1 をとる。



また，境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると，

$b=b^2-1+k$，$b^2-b-1+k=0$ ………④

共有点の b 座標が 1 つである条件は，

$D=1-4(-1+k)=0$，$k=\dfrac{5}{4}$

このとき，④より $b=\dfrac{1}{2}$，③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

［解 説］

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず，x を固定し y を変化させたときの最小値を求め，次にその最小値について，x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 点 $\mathrm{P}(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ を f で移した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\cos\theta \\ 4+2\cos\theta+3\sin\theta \end{pmatrix}$$

よって, $\mathrm{Q}(2+\cos\theta,\ 4+2\cos\theta+3\sin\theta)$ である。

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, $x = 2+\cos\theta$ から $2-1 \leqq x \leqq 2+1$ となり, $1 \leqq x \leqq 3$ ………①

$$y = 4+2\cos\theta+3\sin\theta = 4+\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha) \quad \left(\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

よって, $4-\sqrt{13} \leqq y \leqq 4+\sqrt{13}$ ………②

さて, $T : a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ とするとき, 点 Q が領域 T に入り, しかも T の面積が最小となるのは, ①②より,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ b_1 = 4-\sqrt{13},\ b_2 = 4+\sqrt{13}$$

(3) 点 Q が領域 $H : (x-2)^2+(y-4)^2 \leqq r^2$ に入ることより,

$$(2+\cos\theta-2)^2+(4+2\cos\theta+3\sin\theta-4)^2 \leqq r^2$$

$$r^2 \geqq \cos^2\theta+(2\cos\theta+3\sin\theta)^2 = 5\cos^2\theta+12\sin\theta\cos\theta+9\sin^2\theta$$

$$= \frac{5}{2}(1+\cos 2\theta)+6\sin 2\theta+\frac{9}{2}(1-\sin 2\theta) = 6\sin 2\theta-2\cos 2\theta+7$$

$$= 2\sqrt{10}\sin(2\theta+\beta)+7 \quad \left(\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

よって, $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすすべての θ に対して成立する条件は,

$$r^2 \geqq 2\sqrt{10}+7,\ r \geqq \sqrt{2\sqrt{10}+7} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

すなわち, 点 Q が領域 H に入る r の最小値は $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ である。

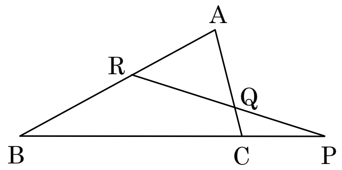
［解 説］

1 次変換を題材にしていますが, 内容は三角関数の変形だけです。

4

問題のページへ

(1)　△ABC と直線 PR について，メネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

ここで，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CA}=1$，$\mathrm{CP}=\mathrm{AQ}=x$ より，

$0<x<1$ のとき，

$$\frac{y}{2-y}\cdot\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x}=1,\ \ \frac{2-y}{y}=\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x},\ \ \frac{2}{y}=\frac{2-x-x^2}{x^2}+1=\frac{2-x}{x^2}$$

よって，$y=\dfrac{2x^2}{2-x}$ となり，この式は $x=0,\ 1$ のときも満たしている。

(2)　(1)より，$f(x)=\dfrac{2x^2}{2-x}=-2x-4-\dfrac{8}{x-2}$ より，

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\Big(-2x-4-\frac{8}{x-2}\Big)dx=\Big[-x^2-4x-8\log|x-2|\Big]_0^1$$
$$=-1-4-8(-\log 2)=8\log 2-5$$

［解　説］

メネラウスの定理の適用問題であることは，図を見た瞬間にわかると思われます。もちろんベクトルを利用しても構いませんが。