1

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

3辺の長さが $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{CA}=7$ の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CR}=x$ となるようにとる。ただし，$0<x<3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

(2) 三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3) 三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1}とb_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0<a<1$ である。関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m=2an$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 番号 k のカードは k 枚なので，用意したカードを N 枚とすると，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) N 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしく，

$$\begin{aligned}{}_N\mathrm{C}_2&=\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}\\&=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2)=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

このとき，引いた 2 枚のカードの番号がともに k である場合は，$k\geqq 2$ では，${}_k\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 通りより，求める確率は，

$$\frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を q_n とおくと，(2)より，

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\&=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\\&=\frac{2}{(n-1)(n+2)}\left\{\frac{1}{3}(2n+1)-1\right\}=\frac{4}{3(n+2)}\end{aligned}$$

(4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率 p_n は，

$$p_n=1-q_n=1-\frac{4}{3(n+2)}$$

条件より，$p_n\geqq 0.9$ なので，$1-\frac{4}{3(n+2)}\geqq\frac{9}{10}$ となり，

$$\frac{4}{3(n+2)}\leqq\frac{1}{10},\quad 3(n+2)\geqq 40,\quad n\geqq\frac{34}{3}$$

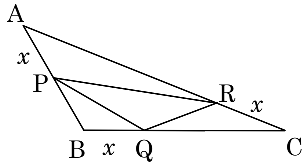
よって，求める最小の自然数 n の値は，$n=12$ である。

［解　説］

確率についての基本的な問題です。

2

問題のページへ



(1)　△ABC に余弦定理を適用すると,

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{ABC}=120°$ である。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120°=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{3-x}{3}\cdot\frac{x}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{15}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{x(3-x)}{15}=\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)$$

(3)　(2)と同様に，$\triangle\mathrm{CQR}=\dfrac{5-x}{5}\cdot\dfrac{x}{7}\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{ARP}=\dfrac{7-x}{7}\cdot\dfrac{x}{3}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，△PQR の面積 S は,

$$S=\left\{1-\frac{x(3-x)}{15}-\frac{x(5-x)}{35}-\frac{x(7-x)}{21}\right\}\cdot\frac{15}{4}\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{28}\{105-7x(3-x)-3x(5-x)-5x(7-x)\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=7x(3-x)+3x(5-x)+5x(7-x)$ とおくと，

$$f(x)=x(71-15x)=-15\left(x-\frac{71}{30}\right)^2+\frac{71^2}{60}$$

すると，$(*)$から $S=\dfrac{\sqrt{3}}{28}\{105-f(x)\}$ なので，S が最小となるときは，$f(x)$ が最大になるときに一致し，$0<x<3$ から $x=\dfrac{71}{30}$ のときである。

［解　説］

三角比の図形への応用問題です。基本的な内容ですので，計算ミスに要注意です。

$\boxed{3}$ 　問題のページへ

(1)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+1$ ………(＊)

(2)　(＊)より，$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$ となり，$b_1=a_2-a_1=1$ から，

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$$

よって，$b_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

(3)　(2)から，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$ より，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(3^k-1)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{3^n}{4}-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$$

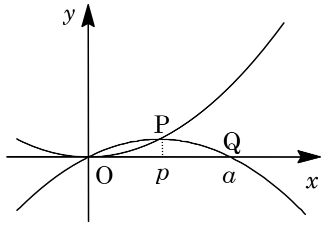
なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

ノーヒントでも出題される隣接 3 項間型の漸化式を，誘導つきで解く問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　条件より，$k<0$ として，$f(x)=kx(x-a)$ とおく。

$C: y=x^2$ ……①，$D: y=f(x)=kx(x-a)$ ……②

を連立すると，

$$x^2=kx(x-a),\ (k-1)x^2-akx=0$$

よって，$x=0,\ \dfrac{ak}{k-1}$ ………③

C と D の共有点のうち，原点と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ とおくと，③より，

$$p=\frac{ak}{k-1}\ \cdots\cdots\cdots④。$$

ここで，①から $y'=2x$ となり，点 P における C の接線の傾き m は $m=2p$，②から $y'=2kx-ak$ となり，点 P における D の接線の傾き n は，$n=2kp-ak$

そこで，条件 $(2a-1)m=2an$ に代入すると，

$$(2a-1)2p=2a(2kp-ak),\ (2ak-2a+1)p-a^2k=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$(2ak-2a+1)ak-a^2k(k-1)=0$ となり，

$$(2ak-2a+1)-a(k-1)=0,\ ak-a+1=0$$

よって，$k=\dfrac{a-1}{a}$ となり，$f(x)=\dfrac{a-1}{a}x(x-a)$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^a \frac{a-1}{a}x(x-a)dx=-\frac{a-1}{6a}\cdot a^3=\frac{a^2(1-a)}{6}$$

(3)　$S'(a)=\dfrac{2a-3a^2}{6}=\dfrac{-a(3a-2)}{6}$

これより，$0<a<1$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{2}{81}$	↘	

よって，$S(a)$ の最大値は $\dfrac{2}{81}$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。(1)の計算はやや量がありますが，その後の設問は基本的なものです。