1

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。

2

解答解説のページへ

座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の内積が 0 になるような点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3) (1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4) (1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

自然数$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，関数$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$を考える。

(1)　曲線$y=f_n(x)$上の点$(a_n,\ f(a_n))$における接線が原点を通るとき，a_nを n の式で表せ。ただし，$a_n>0$とする。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$の範囲で，曲線$y=f_n(x)$と x 軸とで囲まれた図形の面積をB_nとする。また，(1)で求めたa_nに対して，$0\leqq x\leqq a_n$の範囲で，曲線$y=f_n(x)$，x軸，および直線$x=a_n$で囲まれた図形の面積をC_nとする。B_nおよびC_nを n の式で表せ。

(3)　(2)で求めたB_nおよびC_nに対して，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$が自然対数の底$e$であることを用いてよい。

4

解答解説のページへ

座標空間内の 8 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$ のとき，3 点 $(t,\ 0,\ 0)$，$(0,\ t,\ 0)$，$(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0)=f(3)=0$ とする。関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq t\leqq 3$ ののとき，$f(t)$ を t の式で表せ。

(2)　関数 $f(t)$ の $0\leqq t\leqq 3$ における最大値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 番号 k のカードは k 枚なので，用意したカードを N 枚とすると，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) N 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしく，

$$\begin{aligned}{}_N\mathrm{C}_2&=\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}\\&=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2)=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

このとき，引いた 2 枚のカードの番号がともに k である場合は，$k\geqq 2$ では，${}_k\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 通りより，求める確率は，

$$\frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を q_n とおくと，(2)より，

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\&=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\\&=\frac{2}{(n-1)(n+2)}\left\{\frac{1}{3}(2n+1)-1\right\}=\frac{4}{3(n+2)}\end{aligned}$$

(4) 引いたカード 2 枚の番号が k と $k+1$ のとき，その確率は，

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_1\,{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

すると，引いたカード 2 枚の番号が連続している確率 p_n は，

$$\begin{aligned}p_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=2q_n=\frac{8}{3(n+2)}\end{aligned}$$

［解　説］

確率についての基本的な問題です。(3)までは文理共通です。

2　　問題のページへ

(1)　B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$に対し，線分 BC の中点 M は M$\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$となり，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{MP}},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=2\overrightarrow{\mathrm{MP}}$$

また，A$(1,\ 0,\ 0)$に対し，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ となり，点 P は 2 点 A, M を直径の両端とする球面を描く。

よって，その中心 Q は線分 AM の中点より，Q$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$であり，半径 r は,

$$r=\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(2)　$\mathrm{OQ}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ より，球面 S は原点 O を通る。

これより，O から最も遠い距離にある S 上の点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，R$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$である。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる。

すると，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ から，点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面 α 上にある。

(4)　(1)より，$S:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$ ………①

また，平面 α に垂直な直線の方向ベクトルを $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 1,\ 0)=0$，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=0$

すると，$a=b$ かつ $a=c$ より，$\vec{u}=a(1,\ 1,\ 1)$ となり，直線 l は,

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)+t(1,\ 1,\ 1)\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t^2+t^2+t^2=\frac{3}{8}$ から $t^2=\frac{1}{8}$ となり，$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

よって，S と l の共有点の座標は，複号同順で,

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)$$

［解 説］

空間図形の問題です。なお，平面 α の方程式は $x+y+z=1$ ですので，これを利用すると，後半の記述量を圧縮できます。

3

問題のページへ

(1) $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)=x^{n+1}-x^{n+2}$ に対して，$f_n{}'(x)=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$

さて，点$(a_n,\ f(a_n))$における曲線$y=f_n(x)$の接線の方程式は,

$$y-f_n(a_n)=f_n{}'(a_n)(x-a_n)$$

原点を通ることより，$-f_n(a_n)=f_n{}'(a_n)(-a_n)$，$f_n(a_n)=a_n f_n{}'(a_n)$ となり，

$$a_n^{\,n+1}-a_n^{\,n+2}=a_n\{(n+1)a_n^{\,n}-(n+2)a_n^{\,n+1}\},\ \ na_n^{\,n+1}-(n+1)a_n^{\,n+2}=0$$

すると，$a_n>0$ より $n-(n+1)a_n=0$ となり，$a_n=\dfrac{n}{n+1}$ である。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，$f_n(x)\geqq 0$ より，

$$B_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

また，(1)より $0<a_n<1$ なので，$0\leqq x\leqq a_n$ において $f_n(x)\geqq 0$ となり，

$$C_n=\int_0^{a_n} f_n(x)dx=\int_0^{\frac{n}{n+1}}(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big]_0^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n+2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+2}-\frac{1}{n+3}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+3}$$

$$=\frac{(n+1)(n+3)n^{n+2}-(n+2)n^{n+3}}{(n+2)(n+3)(n+1)^{n+3}}=\frac{(2n+3)n^{n+2}}{(n+2)(n+3)(n+1)^{n+3}}$$

(3) $$\frac{C_n}{B_n}=\frac{(2n+3)n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}}=\frac{2n+3}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+2}=\frac{2n+3}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2\frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\frac{2}{1}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$ である。

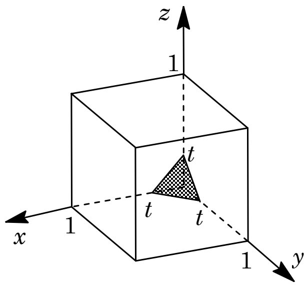
［解 説］

微積分の総合問題です。(2)の後半の計算がやや面倒ですが，全体的には標準レベルです。e の定義式も問題文中にありますし……。

4

問題のページへ

(1)　まず, 1 辺の長さが 1 の立方体に対して，$0<t<3$ において，3 点 $A(t,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ t,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ t)$ を通る平面 α で切断したとき，切り口は右図の網点部にようになり，その面積を $f(t)$ とすると，

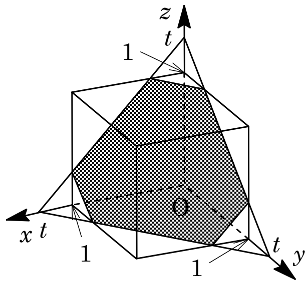


(i)　$0<t\leqq 1$ のとき

切り口は 1 辺の長さが $\sqrt{2}t$ の正三角形 ABC なので，

$$f(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}t)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

(ii)　$1<t<2$ のとき



切り口は六角形となる。また，平面 α 上の立方体の外部の 3 つの正三角形は，正三角形 ABC と相似になり，その相似比は $(t-1):t$ から，

$$f(t)=\left\{1-3\left(\frac{t-1}{t}\right)^2\right\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{t^2-3(t-1)^2\}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)$$

(iii)　$2\leqq t<3$ のとき

切り口は正三角形となり，その面積は(i)の $f(t)$ と $t=\frac{3}{2}$ について対称になるので，

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

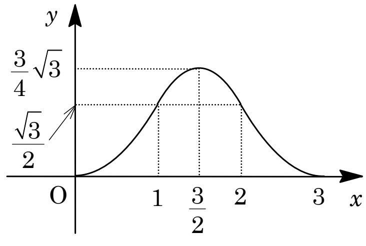
(i)〜(iii)より，$f(0)=f(3)=0$ も合わせると，$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\ \ (0\leqq t\leqq 1)$，

$$f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)\ \ (1<t<2),\ \ f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2\ \ (2\leqq t\leqq 3)$$

(2)　(1)から，$1<t<2$ のとき，

$$f(t)=-\sqrt{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

すると，$0\leqq t\leqq 3$ において，$y=f(t)$ のグラフをかくと，右図のようになり，$f(t)$ は $t=\frac{3}{2}$ のとき最大となり，最大値は $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。



(3)　$$I=\int_0^3 f(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 t^2dt-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^2(2t^2-6t+3)\,dt+\frac{\sqrt{3}}{2}\int_2^3(3-t)^2dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{2}{3}t^3-3t^2+3t\Big]_1^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{(3-t)^3}{3}\Big]_2^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 7-3\cdot 3+3\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$$

［解 説］

まったく同じ問題が繰り返し出題されている超有名問題です。また，3 点 A，B，C を通る平面の方程式は $x+y+z=t$ より，この式を用いて立方体の辺との交点の座標を求めても構いません。なお，(2)と(3)の設問は付録扱いでしょう。