1

解答解説のページへ

複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$ の値を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$ の値を求めよ。

(3)　n を正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ が整数であることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内に，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$がある。O と異なる点$\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を$\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) $s,\ t$ をそれぞれ $u,\ v$ を用いて表せ。

(3) 点 P が xy 平面内の直線$ax+by=1$ $(a^2+b^2 \neq 0)$上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

1 つのサイコロを 3 回振り，出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1 = u\,,\ a_2 = 0\,,\ b_1 = v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2 = v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点$(0,\ 0)$とする。

(1) △OAB が正三角形となる確率を求めよ。

(2) △OAB が大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。

1

問題のページへ

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$\omega+\omega^2=-1\cdots\cdots\cdots①,\ \ \omega^3=\omega\omega^2=\frac{1-3i^2}{4}=1\cdots\cdots\cdots②$$

すると，①②より，$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega^3\omega=\omega^2+\omega=-1$

$$\omega^5+\omega^{10}=\omega^3\omega^2+\omega^9\omega=\omega^2+\omega=-1$$

(2)　k を 0 以上の整数として，n を 3 で割った余りで場合分けをすると，①②から，

(i)　$n=3k+1$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=\omega^{3k}\omega+\omega^{6k}\omega^2=\omega+\omega^2=-1$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=\omega^{3k}\omega^2+\omega^{6k+3}\omega=\omega^2+\omega=-1$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+3}+\omega^{6k+6}=1+1=2$$

(i)～(iii)より，n が 3 の倍数のとき $\omega^n+\omega^{2n}=2$，それ以外のとき $\omega^n+\omega^{2n}=-1$

(3)　$a_n=(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ とおき，$\omega^0=1$ として二項展開すると，

$$a_n=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,\omega^l\,2^{n-l}+\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,\omega^{2l}\,2^{n-l}=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,(\omega^l+\omega^{2l})2^{n-l}$$

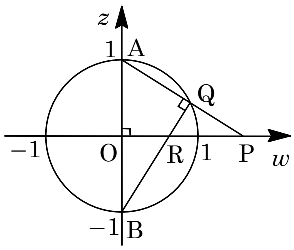
すると，l が 0 以上の整数のとき，(2)から $\omega^l+\omega^{2l}$ は整数となり a_n は整数である。

［解 説］

有名なオメガの問題です。ポイントは①式と②式です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



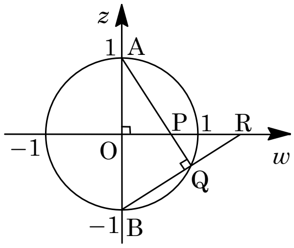
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$w$軸の正の向きとし，球面$S$を$wz$平面で切断したときの切り口を考える。

(i)　点Pが球面Sの外部にあるとき

△OAPと△ORBは相似なので，

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OR} = \mathrm{OP} : \mathrm{OB}$$

よって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = 1$である。



(ii)　点Pが球面S上にあるとき

点Q，点Rは点Pと一致するので，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = 1$

(iii) 点Pが球面Sの内部にあるとき

(i)と同様に，△OAPと△ORBは相似なので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = 1$$

(2)　$\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$より，$\mathrm{OP} = \sqrt{s^2+t^2}$，$\mathrm{OR} = \sqrt{u^2+v^2}$となり，(1)から，

$$\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2} = 1,\ (s^2+t^2)(u^2+v^2) = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$は同じ向きなので，$k$を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ (s,\ t,\ 0) = k(u,\ v,\ 0) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(k^2u^2+k^2v^2)(u^2+v^2) = 1$となり，$k = \dfrac{1}{u^2+v^2}$から，

$$s = \frac{u}{u^2+v^2} \cdots\cdots\cdots ③,\ t = \frac{v}{u^2+v^2} \cdots\cdots\cdots ④$$

(3)　点Pがxy平面内の直線$ax+by=1$上にあるので，$as+bt=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

③④を⑤に代入すると，$\dfrac{au}{u^2+v^2}+\dfrac{bv}{u^2+v^2} = 1$となり，

$$u^2+v^2-au-bv = 0,\ \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

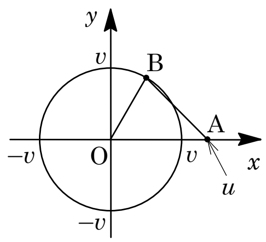
よって，点 R は xy 平面内の，中心$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ 0\right)$で半径$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$の円周上にある。

［解 説］

球面と直線の交わりに関する問題ですが，断面をみると有名な構図になっています。(1)の誘導から，数式的に処理するのではなく，図形的に考えることが示唆されています。しかし，このようなときは，位置関係に注意しなくてはいけません。

3

問題のページへ



(1) サイコロを 3 回振り，出た目を順に u, v, w とし，$A(u,\ 0)$，$B\left(v\cos\dfrac{(w+2)\pi}{12},\ v\sin\dfrac{(w+2)\pi}{12}\right)$を対応させる。

このとき，△OAB が正三角形となるのは，$OA=OB$かつ$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$の場合より，

$$u=v\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{(w+2)\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を満たす$(u,\ v,\ w)$の組は，②より$w=2$となるので，$6\times1\times1=6$通りとなり，この確率は$\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$である。

(2) △OAB が大きさ$\dfrac{\pi}{3}$の内角をもつ直角三角形となるのは，もう 1 つの内角の大きさが$\dfrac{\pi}{6}$となることより，その 3 辺の長さの比は$2:1:\sqrt{3}$となる。

そこで，$OA=u$，$OB=v$は整数値に注意すると，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}\ (w=2)$となり，

(i) $OA:OB=1:2$のとき　$(u,\ v)=(1,\ 2)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 6)$

(ii) $OA:OB=2:1$のとき　$(u,\ v)=(2,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(6,\ 3)$

よって，$(u,\ v,\ w)$の組は$3+3=6$通りとなり，この確率は$\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$である。

［解 説］

確率の基本問題です。(2)は 6 パターンがありますが，そのうち 4 パターンが不適というのは，少し手を動かせばわかるでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

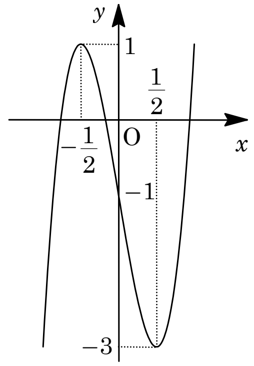
(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2)　$\theta=\frac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos 3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\frac{2\pi}{3}$ より，$\cos\frac{\pi}{2}>\cos\frac{5\pi}{9}>\cos\frac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\quad f\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\frac{1}{5}<a<-\frac{1}{6}$，すなわち $-\frac{1}{5}<\cos\frac{5\pi}{9}<-\frac{1}{6}$ である。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。