$\boxed{1}$

解答解説のページへ

p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d ($d \geqq 0$) のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2)　$p=5$，$n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3)　m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a は正の数とし，次の関数 $y=f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\quad (x\geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を求めよ。

(2)　a が区間 $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3)　$x\geqq 0$ における曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標空間内に，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$がある。O と異なる点$\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を$\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

1

問題のページへ

(1)　3^d が $3^2\,! = 9! = 1\times2\times3\times\cdots\times9$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(3^2\,!)$ は，$3^2\,!$ の素因数 3 の個数より，

$$f(3^2\,!) = f(9!) = \frac{9}{3} + \frac{9}{3^2} = 3 + 1 = 4$$

(2)　5^d が $5^2\,! = 25! = 1\times2\times3\times\cdots\times25$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(5^2\,!)$ は，$5^2\,!$ の素因数 5 の個数より，

$$f(5^2\,!) = f(25!) = \frac{25}{5} + \frac{25}{5^2} = 5 + 1 = 6$$

(3)　p を素数，m を正の整数として，p^d が $p^m\,!$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(p^m\,!)$ は，$p^m\,!$ の素因数 p の個数より，

$$f(p^m\,!) = \frac{p^m}{p} + \frac{p^m}{p^2} + \cdots + \frac{p^m}{p^m} = p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + 1 = \frac{p^m - 1}{p - 1}$$

［解 説］

自然数の積と素因数の個数についての問題です。教科書にも触れられている基本事項の１つです。

$\boxed{2}$

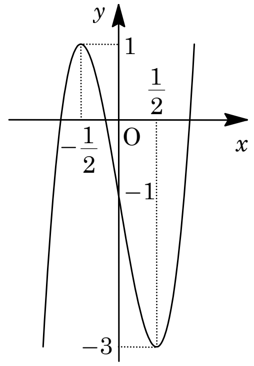
問題のページへ

(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。



したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。

(2)　$\theta=\dfrac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{9}<\dfrac{2\pi}{3}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{2}>\cos\dfrac{5\pi}{9}>\cos\dfrac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0\,,\quad f\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\dfrac{1}{5}<a<-\dfrac{1}{6}$，すなわち $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ である。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

3　　　　問題のページへ

(1)　$a>0$ で，$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\ (x \geqq 0)$ に対し，

$$f_a{}'(x)=ae^{-\frac{x}{a}}+ax\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}=(a-x)e^{-\frac{x}{a}}$$

$$f_a{}''(x)=-e^{-\frac{x}{a}}+(a-x)\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}=\frac{x-2a}{a}e^{-\frac{x}{a}}$$

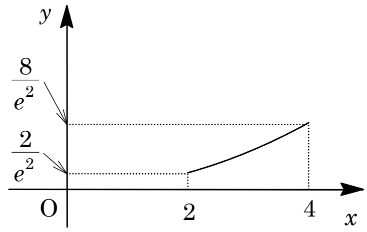
すると，$x=2a$ の前後で $f_a{}''(x)$ の符号が変化するので，$f_a(2a)=\dfrac{2a^2}{e^2}$ より，$y=f_a(x)$ のグラフの変曲点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(2a,\ \dfrac{2a^2}{e^2}\right)$ である。

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=2a$ ……①，$y=\dfrac{2a^2}{e^2}$ ……②

ここで，a が $1 \leqq a \leqq 2$ 全体を動くとき，①より $2 \leqq x \leqq 4$ である。このとき，①から $a=\dfrac{x}{2}$ となり，②に代入すると，P の軌跡 C の方程式は，

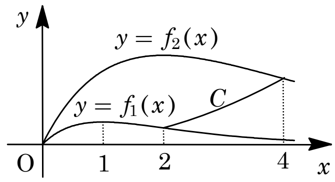
$$y=\frac{2}{e^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2e^2}x^2\quad (2 \leqq x \leqq 4)$$

よって，C の概形は右図のようになる。



(3)　(1)より，$x \geqq 0$ における $f_a(x)$ の増減は右表のようになり，$f_1(x)=xe^{-x}$，$f_2(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}$ に対して，2 曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ および曲線 C との位置関係は右下図のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f_a{}'(x)$		$+$	0	$-$
$f_a(x)$	0	↗	$\dfrac{a^2}{e}$	↘



さて，この 3 曲線で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^4 f_2(x)dx-\int_0^2 f_1(x)dx-\int_2^4\frac{1}{2e^2}x^2dx$$

$$=\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}dx-\int_0^2 xe^{-x}dx-\int_2^4\frac{1}{2e^2}x^2dx$$

$$=\left[-4xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4+\int_0^4 4e^{-\frac{x}{2}}dx-\left[-xe^{-x}\right]_0^2-\int_0^2 e^{-x}dx-\left[\frac{1}{6e^2}x^3\right]_2^4$$

$$=-16e^{-2}-8\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4+2e^{-2}+\left[e^{-x}\right]_0^2-\frac{28}{3}e^{-2}$$

$$=-\frac{70}{3}e^{-2}-8(e^{-2}-1)+(e^{-2}-1)=7-\frac{91}{3e^2}$$

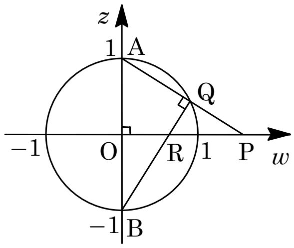
［解　説］

計算ミスに要注意の微積分の総合問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を w 軸の正の向きとし，球面 S を wz 平面で切断したときの切り口を考える。

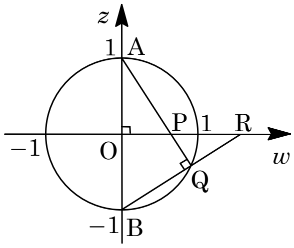


(i)　点 P が球面 S の外部にあるとき

△OAP と△ORB は相似なので，

$$\mathrm{OA}:\mathrm{OR}=\mathrm{OP}:\mathrm{OB}$$

よって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$ である。



(ii)　点 P が球面 S 上にあるとき

点 Q, 点 R は点 P と一致するので，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$

(iii) 点 P が球面 S の内部にあるとき

(i)と同様に，△OAP と△ORB は相似なので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$$

(2)　$\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$ より，$\mathrm{OP}=\sqrt{s^2+t^2}$，$\mathrm{OR}=\sqrt{u^2+v^2}$ となり，(1)から，

$$\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}=1,\ (s^2+t^2)(u^2+v^2)=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は同じ向きなので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ (s,\ t,\ 0)=k(u,\ v,\ 0)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(k^2u^2+k^2v^2)(u^2+v^2)=1$ となり，$k=\dfrac{1}{u^2+v^2}$ から，

$$s=\frac{u}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots③,\ t=\frac{v}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots④$$

(3)　xy 平面内の原点を通らない直線 l を，$ax+by=1$，$z=0$　$(a^2+b^2\neq 0)$ とする。

さて，点 P が l 上にあるので，$as+bt=1\cdots\cdots\cdots⑤$

③④を⑤に代入すると，$\dfrac{au}{u^2+v^2}+\dfrac{bv}{u^2+v^2}=1$ となり，

$$u^2+v^2-au-bv=0,\ \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

よって，点 R は xy 平面内の，中心$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ 0\right)$で半径$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$の円周上にある。

［解　説］

球面と直線の交わりに関する問題ですが，断面をみると有名な構図になっています。(1)の誘導から，数式的に処理するのではなく，図形的に考えることが示唆されています。しかし，このようなときは，位置関係に注意しなくてはいけません。