1　　解答解説のページへ

a を実数とする。座標平面内の曲線 $C : y = x^3 - ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a = 5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。

(2) $R(2^{2017})$ を求めよ。

(3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

座標平面の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を $(3,\ 4)$ とし, 点 R は $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ を満たしているとする。さらに, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$ が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$C: y = x^3 - ax$ ……①に対して，$a = 5$ のとき $y = x^3 - 5x$ となる。

すると，$y' = 3x^2 - 5$ から，接点 $(t,\ t^3 - 5t)$ における接線の方程式は,

$y - (t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(x - t)$，$y = (3t^2 - 5)x - 2t^3$ ………②

ここで，②が点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$0 = 3t^2 - 5 - 2t^3$ となり,

$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0$，$(t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$

ここで，$2t^2 - 5t + 5 = 0$ は，判別式 $D = -15 < 0$ から実数解をもたない。

よって，$t = -1$ となり，②に代入すると，接線の方程式は $y = -2x + 2$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$y' = 3x^2 - a$ から，接線の方程式は,

$y = (3t^2 - a)x - 2t^3$

点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$2t^3 - 3t^2 + a = 0$，$-2t^3 + 3t^2 = a$ ………③

ここで，$f(t) = -2t^3 + 3t^2$ とおくと,

$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

そこで，点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線が 3 本存在する条件は，方程式③が異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，求める a の値の範囲は，$0 < a < 1$ である。

［解 説］

微分の応用についての基本的で頻出の問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ とし，以下，mod7 で記すと，

$$2^{n+3} = 2^n \cdot 8 \equiv 2^n \cdot 1 = 2^n$$

よって，$R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となる。

(2) $2017 = 3\cdot 672 + 1$ より，$2^{2017} = 2^{3\cdot 672+1} = 8^{672}\cdot 2 \equiv 1^{672}\cdot 2 = 2$

よって，$R(2^{2017}) = R(2) = 2$ である。

(3) m を自然数とし，また $29 = 3\cdot 9 + 2$ より，

$$2^{2017}m + 2^{29} = 8^{672}\cdot 2m + 8^9\cdot 2^2 \equiv 1^{672}\cdot 2m + 1^9\cdot 4 = 2m + 4$$

ここで，$R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ ……(＊)に対して，

(i) $R(m) = 0$ $(m \equiv 0)$ のとき　$2m + 4 \equiv 4$ より(＊)を満たさない。

(ii) $R(m) = 1$ $(m \equiv 1)$ のとき　$2m + 4 \equiv 6$ より(＊)を満たさない。

(iii) $R(m) = 2$ $(m \equiv 2)$ のとき　$2m + 4 \equiv 8 \equiv 1$ より(＊)を満たさない。

(iv) $R(m) = 3$ $(m \equiv 3)$ のとき　$2m + 4 \equiv 10 \equiv 3$ より(＊)を満たさない。

(v) $R(m) = 4$ $(m \equiv 4)$ のとき　$2m + 4 \equiv 12 \equiv 5$ より(＊)を満たす。

(vi) $R(m) = 5$ $(m \equiv 5)$ のとき　$2m + 4 \equiv 14 \equiv 0$ より(＊)を満たさない。

(vii) $R(m) = 6$ $(m \equiv 6)$ のとき　$2m + 4 \equiv 16 \equiv 2$ より(＊)を満たさない。

(i)～(vii)より，(＊)を満たすのは $R(m) = 4$ である。

［解　説］

自然数を 7 で割った余りというのが題材の整数問題です。記述を簡潔するために合同式を利用しています。ただ，(3)は書きすぎたような……。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+ax+1=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とすると，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

よって，$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{16}$ である。

(2)　(i)　$-\dfrac{a}{2}<a-1\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f(a-1)=(a-1)^2+a(a-1)+1=2a^2-3a+2$$

(ii)　$a-1\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq a+1\left(-\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

(iii)　$-\dfrac{a}{2}>a+1\left(a<-\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

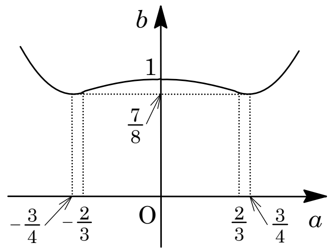
$$m(a)=f(a+1)=(a+1)^2+a(a+1)+1=2a^2+3a+2$$

(3)　(2)より，$m(a)$ は，$m(a)=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\quad\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$

$$m(a)=-\frac{a^2}{4}+1\quad\left(-\frac{2}{3}\leqq a\leqq\frac{2}{3}\right)$$

$$m(a)=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\quad\left(a<-\frac{2}{3}\right)$$

これより，$b=m(a)$ のグラフをかくと右図のようになり，$m(a)$ の最小値は $m\left(\pm\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$ である。



［解 説］

2 次関数の最大・最小に関する基本的な問題です。(2)では図を省きましたが，グラフの軸と区間との位置関係で場合分けをしています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　異なる 3 点 P, Q, R に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より，

$$(\overrightarrow{\mathrm{RP}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}})=0$$

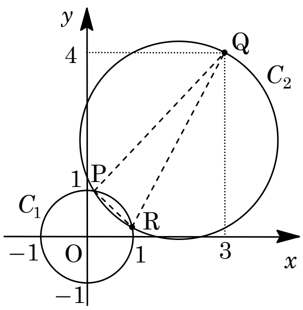
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ である。

(2)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$ なので，(1)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

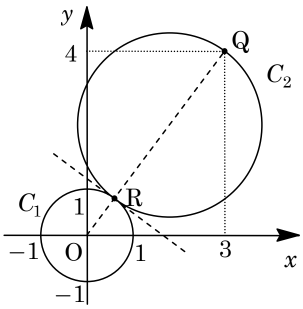
ここで，原点が中心で半径 1 の円を C_1 とし，Q$(3,\ 4)$ および C_1 上の点 R に対して，線分 QR を直径とする円を C_2 とおく。



さて，C_1 の内部または周上の任意の点 P で$(*)$が成り立つことについて，

(i)　C_1 と C_2 が交わるとき

2 交点の一方が点 R となるので，もう一方の交点を点 P としてとると，$\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\angle\mathrm{QRP}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$(*)$は成立しない。



(ii)　C_1 と C_2 が外接するとき

点 R は 2 円の接点となり，C_1 の内部または周上の任意の点 P は，R に一致するか，または R における C_1，C_2 の共通接線について C_2 の反対側にあるので，$(*)$はつねに成立する。

(iii)　C_1 と C_2 が内接するとき

点 R は 2 円の接点となり，点 P が原点に一致するとき $\angle\mathrm{QRP}=0$ となり，$(*)$は成立しない。

(i)〜(iii)より，求める点 R は，C_1 と C_2 の外接するときの接点である。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ に注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,\ 4)=\frac{1}{5}(3,\ 4)$$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ である。

［解 説］

(2)は(1)の結果を利用するものの，数式的な処理では，うまくいきません。そこで，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ のなす角が 90° 以上と大雑把に考えて，解答例を作りました。