1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面内の 2 つの曲線 $C_1 : y = \log(2x)$，$C_2 : y = 2\log x$ の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　C_1，C_2 および l で囲まれる領域の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $P(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

α は $0<|\alpha|<1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列 z_1, z_2, z_3, $\cdots$ を，$z_1=0$, $z_2=1$ および

$$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2, z_4, z_6, $\cdots$ および奇数番目の点の列 z_1, z_3, z_5, $\cdots$ は，それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ を満たす複素数 w を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 3 組を区別しないことより,

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = \frac{15\times 6}{6} = 15 \text{（通り）}$$

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 2 組については区別しないことより,

$$\frac{{}_7C_2 \times {}_5C_2}{2!} = \frac{21\times 10}{2} = 105 \text{（通り）}$$

(3)　A～H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分けるとき, 組を区別して, Ⅰ組(2 人), Ⅱ組(2 人), Ⅲ組(3 人)とすると, その方法は,

$${}_8C_7 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 = 8\times 21\times 10 \text{（通り）}$$

その中で A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になるのは, A, B 以外の 5 人が選ばれる方法が ${}_6C_5$ 通りであることに注意すると,

(i)　Ⅰ組で同じ組となるとき　${}_6C_5 \times {}_5C_2 = 6\times 10 = 60$（通り）

(ii)　Ⅱ組で同じ組となるとき　${}_6C_5 \times {}_5C_2 = 6\times 10 = 60$（通り）

(iii)　Ⅲ組で同じ組となるとき　${}_6C_5 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 = 6\times 5\times 6 = 180$（通り）

(i)～(iii)より, $60+60+180=300$ 通りとなる。

以上より, 求める確率は, $\dfrac{300}{8\times 21\times 10} = \dfrac{5}{28}$ である。

［解　説］

有名な組分け問題です。ただ, (3)では, 同じ人数の組も区別するという立場で確率を計算しています。もちろん(2)と同様でも構いませんが。

2　　問題のページへ

(1)　$C_1 : y=\log(2x)$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$，$C_2 : y=2\log x$ に対して $y'=\dfrac{2}{x}$ となる。

さて，C_1 上の点 $(s,\ \log(2s))$ のおける接線の方程式は,

$$y-\log(2s)=\frac{1}{s}(x-s),\quad y=\frac{1}{s}x-1+\log(2s)\cdots\cdots\cdots①$$

また，C_2 上の点 $(t\ \ 2\log t)$ のおける接線の方程式は,

$$y-2\log t=\frac{2}{t}(x-t),\quad y=\frac{2}{t}x-2+2\log t\cdots\cdots\cdots②$$

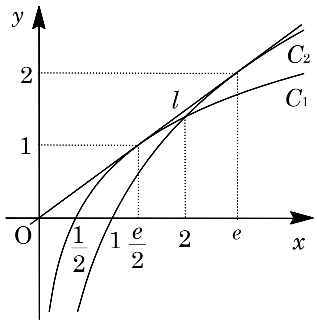
共通接線が存在するので，①と②が一致し,

$$\frac{1}{s}=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots③,\quad -1+\log(2s)=-2+2\log t\cdots\cdots\cdots④$$

③より $t=2s$ となり，④に代入すると，$-1+\log t=-2+2\log t$ より，$\log t=1$

よって，$t=e$，$s=\dfrac{e}{2}$ となるので，共通接線 l の方程式は，②から $y=\dfrac{2}{e}x-2+2\log e$ となり,

$$l : y=\frac{2}{e}x$$



(2)　C_1 と C_2 の共有点は，$\log(2x)=2\log x$ より $2x=x^2$ となり，$x>0$ から $x=2$ である。

すると，C_1，C_2，l の位置関係は右図のようになり，C_1，C_2，l で囲まれる領域の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}(1+2)\left(e-\frac{e}{2}\right)-\int_{\frac{e}{2}}^{2}\log(2x)\,dx-\int_{2}^{e}2\log x\,dx$$

$$=\frac{3}{4}e-\int_{\frac{e}{2}}^{2}\log(2x)\,dx-\int_{2}^{e}2\log x\,dx$$

ここで，$2x=u$ とおくと，$2dx=du$ となり,

$$\int_{\frac{e}{2}}^{2}\log(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{e}^{4}\log u\,du=\frac{1}{2}\Big[u\log u-u\Big]_e^4=\frac{1}{2}(4\log 4-e-4+e)$$

$$=4\log 2-2$$

$$\int_{2}^{e}2\log x\,dx=2\Big[x\log x-x\Big]_2^e=2(e-2\log 2-e+2)=-4\log 2+4$$

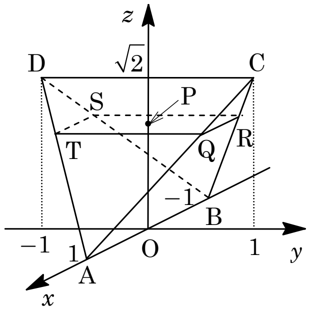
よって，$S=\dfrac{3}{4}e-(4\log 2-2)-(-4\log 2+4)=\dfrac{3}{4}e-2$ となる。

［解　説］

標準的な微積分の総合問題です。(2)の面積計算は，台形の面積から，C_1，C_2 と x 軸で挟まれた部分の面積を引いています。

3

問題のページへ

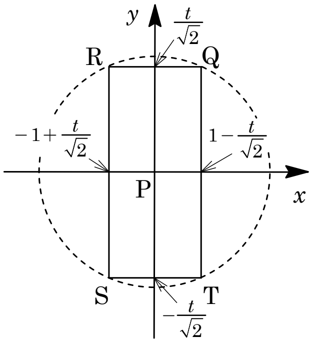


(1) 座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より，辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで，点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は，$\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり，$(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって，交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を，それぞれ R, S, T とおくと，(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から $\mathrm{T}\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

また，点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより，

$$\mathrm{R}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ \mathrm{S}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより，平面 $z=t$ 上で，四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり，この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi\mathrm{PQ}^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると，四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\left[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが，それ以外に，対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

4　問題のページへ

(1)　条件より，$n \geqq 1$のとき，$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})$………①

$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})$………②

①を②に代入し，$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-1})$………③

②より，$n \geqq 2$のとき，$z_{2n}-z_{2n-1}=\overline{\alpha}(z_{2n-1}-z_{2n-2})$となり，①に代入すると，

$z_{2n+1}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-2})$………④

③＋④より，$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$………⑤

(2)　$z_1=0$，$z_2=1$なので，①より$z_3=1+\alpha(1-0)=1+\alpha$となり，さらに②から，

$z_4=(1+\alpha)+\overline{\alpha}(1+\alpha-1)=1+\alpha+|\alpha|^2$………⑥

ここで，$z_{2n+2}-z_{2n}=0$とすると，$|\alpha|\neq 0$なので⑤から$z_{2n}-z_{2n-2}=0$となり，帰納的に$z_4-z_2=0$となるが，これは⑥に反する。これより，偶数番目の点z_2，z_4，z_6，…はすべて異なる。

すると，⑤より，$\dfrac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n}-z_{2n-2}}=|\alpha|^2$なので，$\dfrac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n-2}-z_{2n}}=-|\alpha|^2$から，

$$\arg\frac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n-2}-z_{2n}}=\arg(-|\alpha|^2)=\pi$$

よって，点の列z_2，z_4，z_6，…は同一直線上にある。

また，③より，$n \geqq 2$のとき，$z_{2n}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-2}-z_{2n-3})$………⑦

④＋⑦より，$z_{2n+1}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-3})$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$………⑧

同様にすると，⑧から$\arg\dfrac{z_{2n+1}-z_{2n-1}}{z_{2n-3}-z_{2n-1}}=\pi$となり，奇数番目の点の列$z_1$，$z_3$，$z_5$，…は同一直線上にある。

(3)　⑤より，$z_{2n+2}-z_{2n}=(z_4-z_2)|\alpha|^{2(n-1)}=(\alpha+|\alpha|^2)|\alpha|^{2(n-1)}$となり，$n \geqq 2$で，

$$z_{2n}=z_2+(\alpha+|\alpha|^2)\sum_{k=1}^{n-1}|\alpha|^{2(k-1)}=1+(\alpha+|\alpha|^2)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2(n-1)}}{1-|\alpha|^2}$$

$n\to\infty$のとき，$0<|\alpha|<1$より，$|\alpha|^n\to 0$となり，

$$z_{2n}\to 1+(\alpha+|\alpha|^2)\cdot\frac{1}{1-|\alpha|^2}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

⑧より，$z_{2n+1}-z_{2n-1}=(z_3-z_1)|\alpha|^{2(n-1)}=(1+\alpha)|\alpha|^{2(n-1)}$となり，$n \geqq 2$で，

$$z_{2n-1}=z_1+(1+\alpha)\sum_{k=1}^{n-1}|\alpha|^{2(k-1)}=(1+\alpha)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2(n-1)}}{1-|\alpha|^2}$$

$n\to\infty$のとき，$z_{2n-1}\to(1+\alpha)\cdot\dfrac{1}{1-|\alpha|^2}=\dfrac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_{2n}=\lim_{n\to\infty}z_{2n-1}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$である。

一方，条件より $\lim_{n\to\infty}|z_n - w| = 0$ から，$\lim_{n\to\infty} z_n = w$ であるので，

$$w = \frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

［解　説］

複素数平面上の点列を題材とした問題です。(1)の漸化式の変形については，結論を見ながら方向を定めましたが，手堅く行うならば，奇数番目の項を消去するという方針でも構いません。また，解答例の下から 2 行目で，$\lim_{n\to\infty}|z_n - w| = 0$ から $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ としていますが，この部分は，もう少し丁寧に書いた方がよいかもしれません。