1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3-3x$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線を L とする。ただし $0<t<1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

角αは$0 \leqq \alpha \leqq \pi$を満たし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$とする。角$\theta$は$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くものとする。$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2$とおく。また，$t = \sin\theta + \cos\theta$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$の値を求めよ。

(2)　tの値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$をtの式で表せ。

(4)　$f(\theta)$の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　球面 K の方程式を求めよ。

(2)　S_1 を s と t の式で表せ。

(3)　点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4)　(3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3x$ に対して，$C: y=f(x)$ ……①上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線 L の方程式は，$f'(x)=3x^2-3$ より，

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t),\ \ y=(3t^2-3)x-2t^3 \ \cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x^3-3x=(3t^2-3)x-2t^3$ となり，

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ \ (x-t)^2(x+2t)=0$$

すると，A 以外の共有点 B の x 座標は $x=-2t$ より，$\mathrm{B}(-2t,\ -8t^3+6t)$ となる。

(2)　2 点 A, B の y 座標の差の絶対値を d とおくと，

$$d=\left|t^3-3t-(-8t^3+6t)\right|=\left|9t^3-9t\right|=9\left|t(t+1)(t-1)\right|$$

$0<t<1$ より，$t(t+1)(t-1)<0$ となり，

$$d=-9(t^3-t)$$

すると，$d'=-9(3t^2-1)$ から，$0<t<1$ における d の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
d'		$+$	0	$-$	
d		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき d は最大となる。

［解　説］

微分の応用についての基本事項の確認問題です。

2

問題のページへ

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ から $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ となるので，

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対して，$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$ より，

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos\dfrac{\pi}{2} < \cos\alpha < \cos\dfrac{\pi}{4}$ となり，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ から，

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\sin\dfrac{5}{4}\pi \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，(1)から，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6},\quad -1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって，$-1 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\sqrt{2} + \dfrac{1}{3} \cdots\cdots$③である。

(3)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = t^2 - 1$ より，

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4)　(3)より，$f(\theta)$ を，$t^2 - t + 1 = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ と変形すると，$t = \dfrac{1}{2}$ は③を満たす。

よって，$f(\theta)$ は，$t = \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

［解 説］

基本的な三角関数の計算問題です。

3

問題のページへ

(1)　実数 k に対し，2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は，

$$D=k^2-4(3k-4)<0\,,\ \ k^2-12k+16<0$$

よって，$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず，x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り，余りを $r(x)$ とおくと，

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし，$r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて，①の虚数解 α に対し，$\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると，

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると，α^4 が実数となる条件は，k が実数であることより，

$$k^3-6k^2+8k=0\,,\ \ k(k-2)(k-4)=0$$

よって，求める k の値は，②より，$k=2,\ 4$ である。

［解 説］

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは，整式の除法の計算だけです。

4

問題のページへ

(1) 点 $A(2,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 3,\ -1)$，$C(0,\ 3,\ -3)$，および線分 BC 上の点 $P(0,\ 3,\ s)$ $(-3\leqq s\leqq -1)$ に対して，線分 AP を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 Q の座標は，$Q(2-2t,\ 3t,\ st-t+1)$ となる。

このとき，点 Q を中心とする半径 3 の球面 K の方程式は，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9\cdots\cdots\cdots①$$

(2) K と xy 平面が交わってできる円は，①に $z=0$ を代入して，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2=9-(st-t+1)^2 \text{　かつ　} z=0$$

すると，その面積 S_1 は，$S_1=\pi\{9-(st-t+1)^2\}\cdots\cdots\cdots②$

(3) K と yz 平面が交わってできる円は，①に $x=0$ を代入して，

$$(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9-(2-2t)^2 \text{　かつ　} x=0$$

すると，その面積 S_2 は，$S_2=\pi\{9-(2-2t)^2\}\cdots\cdots\cdots③$

さて，$S=S_1+S_2$ とおくと，②③より，

$$S=\pi\{9-(st-t+1)^2+9-(2-2t)^2\}=\pi\{18-(st-t+1)^2-(2-2t)^2\}$$

ここで，点 P を線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動かすという条件を，s を $s=s_0$ $(-3\leqq s_0\leqq -1)$ と固定し，t を $0<t<1$ で動かすと考えて，

$$S=\pi\{18-f(t)\},\ f(t)=(s_0t-t+1)^2+(2-2t)^2$$

すると，S が最大値をとるとき，$f(t)$ は最小となることより，

$$\begin{aligned}f(t)&=(s_0-1)^2t^2+2(s_0-1)t+1+4t^2-8t+4\\&=\{(s_0-1)^2+4\}t^2+2(s_0-5)t+5\\&=\{(s_0-1)^2+4\}\Big\{t+\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}\Big\}^2-\frac{(s_0-5)^2}{(s_0-1)^2+4}+5\end{aligned}$$

ここで，$-3\leqq s_0\leqq -1$ より，$-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}>0$ となり，

$$-\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}-1=\frac{-{s_0}^2+s_0}{(s_0-1)^2+4}=\frac{-s_0(s_0-1)}{(s_0-1)^2+4}<0$$

よって，$0<-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}<1$ となり，$f(t)$ は $t=-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}$ で最小となる。

すなわち，S が最大値をとるのは，$t=-\dfrac{s-5}{(s-1)^2+4}$ のときである。

(4) 点 Q が線分 AP の中点，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最大値をとるので，

$$\frac{1}{2}=-\frac{s-5}{(s-1)^2+4},\ s^2-2s+5=-2s+10$$

すると，$s^2=5$ となり，$-3\leqq s\leqq -1$ から，$s=-\sqrt{5}$ となる。

［解 説］

空間図形を題材とした複雑そうな問題設定ですが，内容は基本的です。最もエネルギーが必要なのは，平方完成をして軸の位置のチェックの箇所ですので。