$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=(1+x)e^x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ について，原点を通るすべての接線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ について，原点を通る接線のうち，接点の x 座標が最大のものを L とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 L および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

２

解答解説のページへ

図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは，1，3，5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2，6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

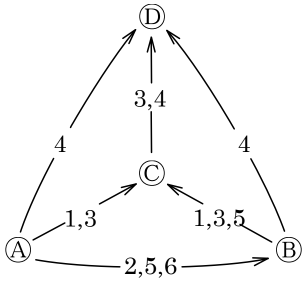


図1：経路の図

(1)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3)　ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

　k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$, $\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし, t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし, 球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1, 球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し, 点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=(1+x)e^x$ に対して，$f(x)=0$ の解は，$e^x>0$ から $x=-1$ である。

(2)　$f'(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$ から，曲線 $y=f(x)$ 上の接点を $(t,\ (1+t)e^t)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(1+t)e^t=(2+t)e^t(x-t),\quad y=(2+t)e^t x-(t^2+t-1)e^t$$

原点を通ることより，$(t^2+t-1)e^t=0$ すなわち $t^2+t-1=0$ となり，

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，求める接線は，$y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}x$，$y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}x$ である。

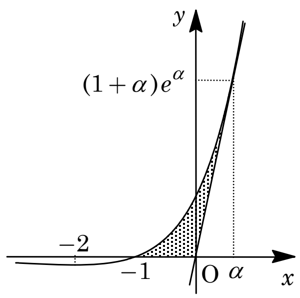
(3)　まず，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{e^2}$	↗

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

また，条件より，接線 $L:y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}x$ となり，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$L:y=(2+\alpha)e^\alpha x$ と表せ，接点の座標は $(\alpha,\ (1+\alpha)e^\alpha)$ となる。

すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 L および x 軸で囲まれた部分の面積 S は，



$$S=\int_{-1}^{\alpha}(1+x)e^x dx-\frac{1}{2}\alpha\cdot(1+\alpha)e^\alpha$$

$$=\big[(1+x)e^x\big]_{-1}^{\alpha}-\int_{-1}^{\alpha}e^x dx-\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)e^\alpha$$

$$=(1+\alpha)e^\alpha-(e^\alpha-e^{-1})-\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)e^\alpha=\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)e^\alpha+e^{-1}$$

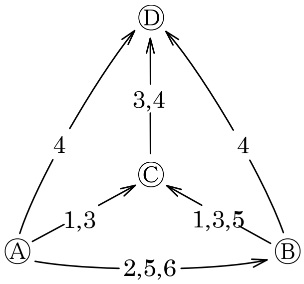
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{e}=\frac{-2+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{e}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。数値はやや複雑ですが，内容は基本的です。

2

問題のページへ



(1) n 回の操作の後，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒにいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，条件より，$a_n = 0\ (n \geqq 1)$ である。

また，$b_1 = \dfrac{1}{2}$ のもとで，条件より，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n = b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $c_1 = \dfrac{1}{3}$ のもとで，条件より，

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}c_n$ ………②

ここで，②を満たす１つの数列を，α を定数として，$c_n = \alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\alpha$ から $\alpha = -\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ ………③}$$

②－③より，$c_{n+1} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2}{3}\left\{c_n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

$$c_n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left\{c_1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n = \dfrac{13}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率を P_n とおくと，

(i) $n = 1$ のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1 = \dfrac{1}{6}$

(ii) $n \geqq 2$ のとき　$a_n = 0$ から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$P_m = \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\left\{\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

(1)　実数 k に対し，2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は,

$$D=k^2-4(3k-4)<0\text{，}\ k^2-12k+16<0$$

よって，$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず，x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り，余りを $r(x)$ とおくと,

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし，$r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて，①の虚数解 α に対し，$\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると,

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると，α^4 が実数となる条件は，k が実数であることより,

$$k^3-6k^2+8k=0\text{，}\ k(k-2)(k-4)=0$$

よって，求める k の値は，②より，$k=2$，4 である。

［解　説］

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは，整式の除法の計算だけです。

4　　　　問題のページへ

(1) 点 $A(2,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 3,\ -1)$，$C(0,\ 3,\ -3)$，および線分 BC 上の点 $P(0,\ 3,\ s)$ $(-3 \leqq s \leqq -1)$ に対して，線分 AP を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 Q の座標は，$Q(2-2t,\ 3t,\ st-t+1)$ となる。

このとき，点 Q を中心とする半径 3 の球面 K の方程式は，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9 \cdots\cdots\text{①}$$

(2) K と xy 平面が交わってできる円は，①に $z=0$ を代入して，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2=9-(st-t+1)^2 \quad \text{かつ} \quad z=0$$

すると，その面積 S_1 は，$S_1=\pi\{9-(st-t+1)^2\} \cdots\cdots\text{②}$

(3) K と yz 平面が交わってできる円は，①に $x=0$ を代入して，

$$(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9-(2-2t)^2 \quad \text{かつ} \quad x=0$$

すると，その面積 S_2 は，$S_2=\pi\{9-(2-2t)^2\} \cdots\cdots\text{③}$

さて，$S=S_1+S_2$ とおくと，②③より，

$$S=\pi\{9-(st-t+1)^2+9-(2-2t)^2\}=\pi\{18-(st-t+1)^2-(2-2t)^2\}$$

ここで，点 P を線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動かすという条件を，s を $s=s_0$ $(-3 \leqq s_0 \leqq -1)$ と固定し，t を $0<t<1$ で動かすと考えて，

$$S=\pi\{18-f(t)\},\ f(t)=(s_0t-t+1)^2+(2-2t)^2$$

すると，S が最大値をとるとき，$f(t)$ は最小となることより，

$$\begin{aligned}f(t)&=(s_0-1)^2t^2+2(s_0-1)t+1+4t^2-8t+4\\&=\{(s_0-1)^2+4\}t^2+2(s_0-5)t+5\\&=\{(s_0-1)^2+4\}\left\{t+\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}\right\}^2-\frac{(s_0-5)^2}{(s_0-1)^2+4}+5\end{aligned}$$

ここで，$-3 \leqq s_0 \leqq -1$ より，$-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}>0$ となり，

$$-\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}-1=\frac{-s_0{}^2+s_0}{(s_0-1)^2+4}=\frac{-s_0(s_0-1)}{(s_0-1)^2+4}<0$$

よって，$0<-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}<1$ となり，$f(t)$ は $t=-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}$ で最小となる。

すなわち，S が最大値をとるのは，$t=-\dfrac{s-5}{(s-1)^2+4}$ のときである。

(4) 点 Q が線分 AP の中点，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最大値をとるので，

$$\frac{1}{2}=-\frac{s-5}{(s-1)^2+4},\ s^2-2s+5=-2s+10$$

すると，$s^2=5$ となり，$-3 \leqq s \leqq -1$ から，$s=-\sqrt{5}$ となる。

［解 説］

空間図形を題材とした複雑そうな問題設定ですが，内容は基本的です。最もエネルギーが必要なのは，平方完成をして軸の位置のチェックの箇所ですので。