1　解答解説のページへ

x は $0<x<1$ を満たす実数とする。三辺の長さが 1, 1, $2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r, 外接円の半径を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) r と R を x を用いて表せ。

(2) $\dfrac{r}{R}$ を最大にする x とそのときの $\dfrac{r}{R}$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a\ ,\ \ x_2=b\ ,\ \ x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　x_6，x_7 を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$a=2$ とする。$x_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を$1:3$に内分する点を E，辺 OC を$1:3$に内分する点を F とする。△DEF の重心を G とし，直線 OG と△ABC の交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{OG}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ。

(2) 線分 AH の長さを求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3$ と直線 $L: y = -2ax - a^2$ について，以下の問いに答えよ。

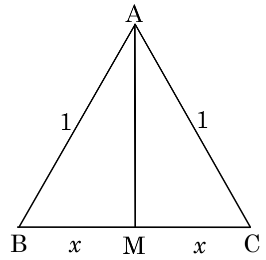
(1)　C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a の値が(1)の範囲にあるとする。C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$0<x<1$ のとき，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=2x$ である△ABC において，辺 BC の中点を M とすると，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となり，



$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-x^2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

△ABC の内接円の半径を r とすると，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}(1+1+2x)r=(1+x)r\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x\cdot\sqrt{1-x^2}=(1+x)r$ となり，$r=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}\ \cdots\cdots\cdots③$

△ABC の外接円の半径を R とすると，$\mathrm{AC}=1$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\sqrt{1-x^2}$ より，

正弦定理を用いると，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2R,\ R=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　③④から，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}\cdot\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{1}=\dfrac{2x(1-x^2)}{1+x}=2x(1-x)$ となり，

$$\frac{r}{R}=-2x^2+2x=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

すると，$0<x<1$ から，$\dfrac{r}{R}$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

三角比の応用についての基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$ より，

$$x_3=\frac{1+x_2}{x_1}=\frac{1+b}{a},\quad x_4=\frac{1+x_3}{x_2}=\frac{1+\dfrac{1+b}{a}}{b}=\frac{a+b+1}{ab}$$

$$x_5=\frac{1+x_4}{x_3}=\frac{1+\dfrac{a+b+1}{ab}}{\dfrac{1+b}{a}}=\frac{ab+a+b+1}{b(b+1)}=\frac{a(b+1)+(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a+1}{b}$$

$$x_6=\frac{1+x_5}{x_4}=\frac{1+\dfrac{a+1}{b}}{\dfrac{a+b+1}{ab}}=\frac{ab}{b}=a,\quad x_7=\frac{1+x_6}{x_5}=\frac{1+a}{\dfrac{a+1}{b}}=b$$

(2)　(1)より，数列 $\{x_n\}$ は周期 5 の周期数列となり，l を 0 以上の整数として，

$$x_{5l+1}=a,\quad x_{5l+2}=b,\quad x_{5l+3}=\frac{b+1}{a},\quad x_{5l+4}=\frac{a+b+1}{ab},\quad x_{5l+5}=\frac{a+1}{b}$$

さて，$a=2$ のとき，

$$x_{5l+1}=2,\quad x_{5l+2}=b,\quad x_{5l+3}=\frac{b+1}{2},\quad x_{5l+4}=\frac{b+3}{2b},\quad x_{5l+5}=\frac{3}{b}$$

このとき，x_n がすべて自然数になるには，$x_{5l+2}=b$ が自然数で $x_{5l+5}=\dfrac{3}{b}$ が自然数，すなわち b は 3 の約数となり，$b=1$ または $b=3$ であることが必要である。

(i)　$b=1$ のとき

$x_{5l+3}=\dfrac{1+1}{2}=1$，$x_{5l+4}=\dfrac{1+3}{2}=2$ より，x_n はすべて自然数である。

(ii)　$b=3$ のとき

$x_{5l+3}=\dfrac{3+1}{2\cdot1}=2$，$x_{5l+4}=\dfrac{3+3}{2\cdot3}=1$ より，x_n はすべて自然数である。

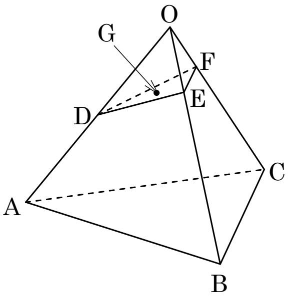
(i)(ii)より，求める b の値は，$b=1,\ 3$ である。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題です。(1)の計算を行えば，$\{x_n\}$ が周期数列というのがみえてきます。証明は省いていますが。

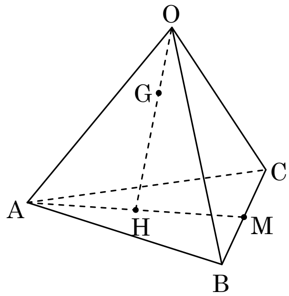
3

問題のページへ



(1)　正四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を1 : 3に内分する点を E，辺 OC を1 : 3に内分する点を F とする。さらに，△DEF の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$$



(2)　直線 OG と△ABC の交点 H に対し，k を実数として，

$$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{12}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}k\overrightarrow{OC}$$

また，点 H は 3 点 A, B, C で定まる平面上にあるので，

$$\frac{1}{6}k+\frac{1}{12}k+\frac{1}{12}k=1$$

よって，$k=3$ から，$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

さて，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ となるので，

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$$

これより，点 H は線分 AM の中点である。

すると，正四面体 OABC の一辺の長さは 1 から，$AM=AB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，

$$AH=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。(2)は内積計算で押し通すこともできますが，ここでは対称性を利用した解法で記しました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) 放物線 $C: y=2x^2+4x+3$ ……①と直線 $L: y=-2ax-a^2$ ……②を連立して，

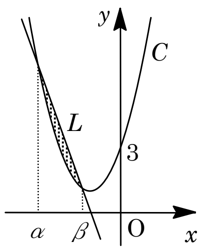
$$2x^2+4x+3=-2ax-a^2,\ \ 2x^2+2(a+2)x+a^2+3=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

C と L が異なる 2 点で交わることより，③の判別式 $D>0$ となり，

$$(a+2)^2-2(a^2+3)>0,\ \ a^2-4a+2<0$$

よって，$2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$ となる。

(2) ③の解 $x=\dfrac{-a-2\pm\sqrt{-a^2+4a-2}}{2}$ を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，C と L で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_\alpha^\beta\{(-2ax-a^2)-(2x^2+4x+3)\}dx$$
$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-2\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\Big(\sqrt{-a^2+4a-2}\Big)^3=\frac{1}{3}\Big(\sqrt{-(a-2)^2+2}\Big)^3$$

よって，S は $a=2$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{3}(\sqrt{2})^3=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

定積分と面積についての最頻出の基本問題です。