1

解答解説のページへ

AとBの2人がじゃんけんをする。1回ごとに, 勝った方は2点, 負けた方は0点, あいこの場合はどちらも1点ずつを得るものとする。n 回目のじゃんけんを終えた時点でのAの得点の合計を a_n, Bの得点の合計を b_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a_3 = 3$ となる確率を求めよ。

(2) $a_5 = 5$ となる確率を求めよ。

(3) $a_5 \geqq b_5$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a\ ,\ \ x_2 = b\ ,\ \ x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　x_6, x_7 を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$x_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて自然数になるような $a,\ b$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

次の 3 つの等式

$$z\overline{w}=\overline{z}w\,,\ \ |z-1|=1\,,\ \ |z-w|=2$$

を満たす複素数 z, w について, 以下の問いに答えよ。ただし $z\neq 0$ とし, z の偏角を θ と表す。

(1) 複素数平面において 3 点 0, z, w は一直線上にあることを示せ。

(2) z と w を θ を用いて表せ。

(3) θ は $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。このとき w のとりうる値について, その虚部の最大の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面において線分 $L: y=x\ (0 \leqq x \leqq 1)$，曲線 $C: y=x^2-x+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ および y 軸で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分 OQ の長さ u を t で表せ。ただし O は原点とする。

(2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3) 図形 D を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1) A と B がじゃんけんをするとき，手の出方は $3^2=9$ 通りで同様に確からしい。

ここで，あいこになる場合は同じ手の出る 3 通りなので，その確率は $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ である。また，A が勝つ場合と B が勝つ場合は対等なので，その確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$ ずつである。そして，勝った方は 2 点，負けた方は 0 点，あいこの場合はどちらも 1 点ずつを得るものとする。

さて，n 回目のじゃんけんを終えた時点で，A の勝ちが x 回，B の勝ちが y 回，あいこが z 回とすると，$n=3$ のとき A の得点が 3 点となるのは，

$$x+y+z=3,\ 2x+z=3$$

すると，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 1,\ 1)$ より，$a_3=3$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+3!\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$$

(2) (1)と同様に考えて，$n=5$ のとき A の得点が 5 点となるのは，

$$x+y+z=5,\ 2x+z=5$$

すると，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 1)$ より，$a_5=5$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{51}{3^5}=\frac{17}{81}$$

(3) (2)と同様に設定して，$a_5=b_5$ となるのは，

$$x+y+z=5,\ 2x+z=2y+z$$

すると，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 1)$ より，確率は $\dfrac{17}{81}$ である。

ここで，$a_5>b_5$ の場合と $a_5<b_5$ の場合は対等なので，その確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{17}{81}\right)=\dfrac{32}{81}$ ずつである。

よって，$a_5\geqq b_5$ となる確率は，$\dfrac{17}{81}+\dfrac{32}{81}=\dfrac{49}{81}$ である。

［解　説］

じゃんけんを題材とした確率の有名問題です。最初は気付きませんでしたが，(2)と(3)には密接な関係がありました。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$ より，

$$x_3=\frac{1+x_2}{x_1}=\frac{1+b}{a},\quad x_4=\frac{1+x_3}{x_2}=\frac{1+\frac{1+b}{a}}{b}=\frac{a+b+1}{ab}$$

$$x_5=\frac{1+x_4}{x_3}=\frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}}=\frac{ab+a+b+1}{b(b+1)}=\frac{a(b+1)+(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a+1}{b}$$

$$x_6=\frac{1+x_5}{x_4}=\frac{1+\frac{a+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{ab}{b}=a,\quad x_7=\frac{1+x_6}{x_5}=\frac{1+a}{\frac{a+1}{b}}=b$$

(2)　(1)より，数列 $\{x_n\}$ は周期 5 の周期数列となり，l を 0 以上の整数として，

$$x_{5l+1}=a,\ x_{5l+2}=b,\ x_{5l+3}=\frac{b+1}{a},\ x_{5l+4}=\frac{a+b+1}{ab},\ x_{5l+5}=\frac{a+1}{b}$$

このとき，x_n がすべて自然数になるには，a, b が自然数のもとで，$\dfrac{b+1}{a}$，$\dfrac{a+b+1}{ab}$，$\dfrac{a+1}{b}$ が自然数になることである。

そこで，$\dfrac{b+1}{a}\geqq 1$，$\dfrac{a+b+1}{ab}\geqq 1$，$\dfrac{a+1}{b}\geqq 1$ が必要になり，

$$b+1\geqq a\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b+1\geqq ab\cdots\cdots\cdots②,\quad a+1\geqq b\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$ab-a-b\leqq 1$，$(a-1)(b-1)\leqq 2\cdots\cdots\cdots④$

すると，$a-1\geqq 0$，$b-1\geqq 0$ なので，$(a-1)(b-1)\geqq 0$ となり，④から，

(i)　$(a-1)(b-1)=0$ のとき

$a=1$ のとき③より $b=1,\ 2$ となり，$b=1$ のとき①より $a=1,\ 2$ となるので，

・$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　$\dfrac{b+1}{a}=2$，$\dfrac{a+b+1}{ab}=3$，$\dfrac{a+1}{b}=2$ より適する。

・$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき　$\dfrac{b+1}{a}=3$，$\dfrac{a+b+1}{ab}=2$，$\dfrac{a+1}{b}=1$ より適する。

・$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき　$\dfrac{b+1}{a}=1$，$\dfrac{a+b+1}{ab}=2$，$\dfrac{a+1}{b}=3$ より適する。

(ii)　$(a-1)(b-1)=1$ のとき

$(a-1,\ b-1)=(1,\ 1)$ から $(a,\ b)=(2,\ 2)$ となるが，$\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{3}{2}$ より不適である。

(iii)　$(a-1)(b-1)=2$ のとき

$(a-1,\ b-1)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$ となる。

・$(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき　$\dfrac{b+1}{a}=2$，$\dfrac{a+b+1}{ab}=1$，$\dfrac{a+1}{b}=1$ より適する。

・$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のとき　$\dfrac{b+1}{a}=1$，$\dfrac{a+b+1}{ab}=1$，$\dfrac{a+1}{b}=2$ より適する。

(i)～(iii)より，x_n がすべて自然数になる $a,\,b$ の組は,

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

［解 説］

漸化式と整数の融合問題です。(1)の計算を行えば，$\{x_n\}$ が周期数列というのがみえてきます。証明は省いていますが。また，(2)は，不等式の処理について，いろいろな解法が考えられます。

3

問題のページへ

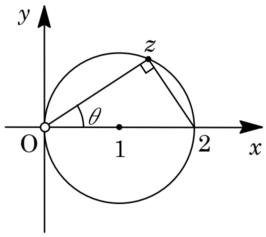
(1)　複素数 z, w について，$z\overline{w}=\overline{z}w$ ……①，$|z-1|=1$ ……②，$|z-w|=2$ ……③

①より，$\overline{\overline{z}w}=\overline{z}w$ となり $\overline{z}w$ は実数，すなわち $\overline{z}w=k$ (k は実数)で，$z\neq 0$ から，

$$w=\frac{k}{\overline{z}}=\frac{k}{\overline{z}z}z=\frac{k}{|z|^2}z$$

よって，複素数平面上で 3 点 $0, z, w$ は一直線上にある。

(2)　②より，z は点 1 を中心とする半径 1 の円周，すなわち原点と点 2 を結ぶ線分を直径とする円周上にある。



すると，$\arg z=\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ から，

$$|z|=2\cos\theta$$

よって，$z=2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$ となる。

また，③から z と w の距離が 2 で，(1)の結果を合わせると，w は 2 つ存在し，

$$w=(2\cos\theta+2)(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$w=(2-2\cos\theta)\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$$
$$=(2\cos\theta-2)(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　④または⑤で表される w について，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のときに虚部が最大になるのは，④の方で，その虚部の値を $f(\theta)$ とおけば，$f(\theta)=(2\cos\theta+2)\sin\theta$ となり，

$$f'(\theta)=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta+2)\cos\theta=-2+2\cos^2\theta+2\cos^2\theta+2\cos\theta$$
$$=2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$
$$=2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↘	

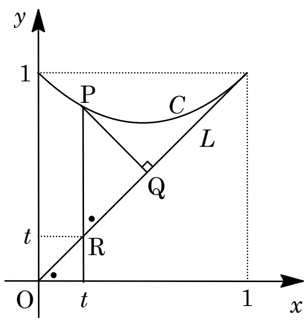
［解 説］

複素数平面における図形の問題です。(2)については，共役複素数を利用した数式処理も可能ですが，ここでは図形的に解きました。

4

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\ (0 \leqq x \leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 - t + 1)$ から，線分 $L: y = x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ に下ろした垂線と L の交点を Q，P から x 軸に下ろした垂線と L との交点を R とする。



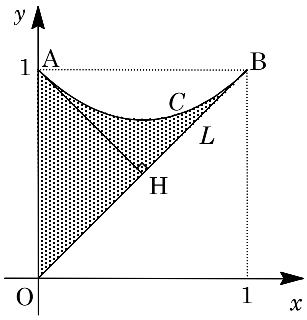
このとき，L と x 軸の正の向きとのなす角が $45°$ より，

$$u = \mathrm{OQ} = \mathrm{OR} + \mathrm{RQ}$$
$$= \frac{t}{\cos 45°} + \{(t^2 - t + 1) - t\}\cos 45°$$
$$= \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 2t + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 + 1)$$

(2)　$\mathrm{PQ} = \mathrm{RQ}\tan 45° = \mathrm{RQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 2t + 1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-1)^2$

(3)　$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ とし，A から L に下ろした垂線と L との交点を H とすると，$\mathrm{H}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$\mathrm{OH} = \mathrm{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



さて，図形 D を直線 $y = x$ のまわりに 1 回転してできる立体のうち，△AHO を回転した円錐の体積を V_1，図形 AHB を回転した立体の体積を V_2 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi,\quad V_2 = \pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{PQ}^2\, du$$

ここで，(1)より $du = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2t\,dt = \sqrt{2}t\,dt$ となり，$u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \to \sqrt{2}$ は $t = 0 \to 1$ から，

$$V_2 = \pi\int_0^1 \frac{1}{2}(t-1)^4 \cdot \sqrt{2}t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1 t(t-1)^4\,dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left\{\frac{1}{5}\Big[\,t(t-1)^5\,\Big]_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 (t-1)^5\,dt\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{10}\pi\cdot\frac{1}{6}\Big[\,(t-1)^6\,\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

よって，求める立体の体積は，$V_1 + V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi + \dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\pi$ である。

［解　説］

斜回転体の体積を求める典型的な問題です。誘導が詳しく付いているので，方針を誤ることはないでしょう。なお，岡山大では，十数年ぶり，久々の再登場でした。