1

解答解説のページへ

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

数直線上を動く点 P がある。点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$0 \leqq x_n \leqq 2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

平面上に三角形 ABC を考え，その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 平面上の任意の点 P に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$$

(4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geqq \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面において，放物線 $y=-x^2+1$ を C，原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし，$r>0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。以下の問いに答えよ。

(1) r の値の範囲を求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，円 D 上の点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における D の接線を l とする。接線 l と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし，S は r と $\sin\theta$ を用いて表すこと。

1　　問題のページへ

(1)　正の整数 m で，$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$

これより，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。

(2)　(1)より，$x^{3m}-1=(x-1)(x^2+x+1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ となり，ここで $q(x)=(x-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ とおくと，

$$x^{3m}-1=(x^2+x+1)q(x)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りについて，n の値で場合分けをすると，

(i)　$n=3m$ のとき　①より，余りは 0 である。

(ii)　$n=3m+1$ のとき　$x^{3m+1}-1=x\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$x^{3m+1}-1=x\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{xq(x)\}+x-1$$

これより，余りは $x-1$ である。

(iii)　$n=3m+2$ のとき　$x^{3m+2}-1=x^2\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$\begin{aligned}x^{3m+2}-1&=x^2\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+x^2-1\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+(x^2+x+1)\cdot1-x-2\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)+1\}-x-2\end{aligned}$$

これより，余りは $-x-2$ である。

なお，$n=1$ のときは，$x-1=(x^2+x+1)\cdot0+x-1$ より余りは $x-1$，$n=2$ のときは，$x^2-1=(x^2+x+1)\cdot1-x-2$ より余りは $-x-2$ である。

以上より，mod 3 で n を記述すると，

$n\equiv0$ のとき余り 0，$n\equiv1$ のとき余り $x-1$，$n\equiv2$ のとき余り $-x-2$

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った商を $p(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)p(x)+(ax+b)$$

ここで，$x=-t$ とおくと，$t^{2024}-1=(t^2+t+1)p(-t)+(-at+b)\cdots\cdots\cdots②$

さて，$2024=3\times674+2$ から $2024\equiv2$ となり，(2)の結果を②に適用すると，

$$-at+b=-t-2$$

よって，$a=1$，$b=-2$ から，$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りは $x-2$ である。

［解　説］

整式の除法を題材にした問題です。1 の虚立方根 ω を利用する方法も考えられますが，ここでは設問の流れを重視した解法で記述しました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

数直線上の原点 O を出発して，コインの表が出たら $+1$，裏が出たら -1 だけ進む点 P について，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。

(1)　コインを 10 回投げ $x_{10}=0$ となるのは，表と裏が 5 回ずつのときで，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 7}{2^{10}}=\frac{63}{256}$$

(2)　$x_5=1$ となるのは，表が 3 回，裏が 2 回のときで，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\cdot 5}{2^5}=\frac{5}{16}$$

$x_5=1$ のもとで $x_{10}=0$ となるのは，表が 2 回，裏が 3 回のときで，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2\cdot 5}{2^5}=\frac{5}{16}$$

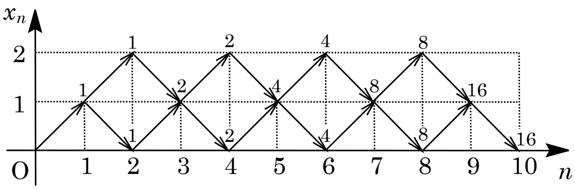
これより，$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，$\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{25}{256}$ となる。

したがって，$x_5\neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，(1)の結果から，

$$\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128}$$

(3)　$0\leqq x_n\leqq 2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となるのは，右図の 16 通りの経路が対応するので，その確率は，

$$16\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{2^4}{2^{10}}=\frac{1}{64}$$



［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)では，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ の場合にきつい条件が課されているので，図で網羅して数えました。

3

問題のページへ

(1)　△ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ より，

$$-3\overrightarrow{GA}=(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}),\ \ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　平面上の任意の点 P に対して，$|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GP}|^2=|\overrightarrow{GA}|^2-2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{GB}|^2-2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2,\ \ |\overrightarrow{PC}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2-2\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2$$

①から，$-2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GP}-2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GP}-2\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GP}=-2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\cdot\overrightarrow{GP}=0$ となり，

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=3|\overrightarrow{PG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②において，P＝A，P＝B，P＝C とおくと，

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=3|\overrightarrow{AG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=4|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

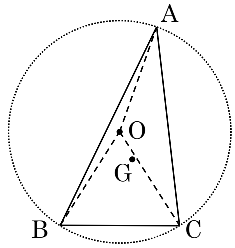
$$|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=3|\overrightarrow{BG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{GA}|^2+4|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

$$|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2=3|\overrightarrow{CG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+4|\overrightarrow{GC}|^2$$

各辺を加えると，$2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)=6(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$ より，

$$|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

(4)　△ABC の外心を O，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ とする。



②において，P＝O とおくと，

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

$$3R^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

③を代入すると，$3R^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}$

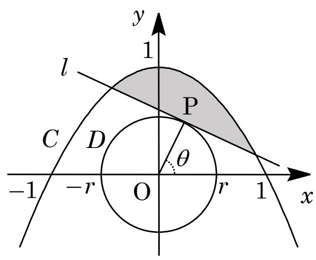
$$R^2=|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{9}\geqq\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)→(2)→(3)という誘導の流れと，(2)かつ(3)→(4)という誘導の流れで，設問が構成されています。

4

問題のページへ



(1)　$C: y=-x^2+1$ ……①，$D: x^2+y^2=r^2$ ……②を連立し，$y=-(r^2-y^2)+1$ から $y^2-y-r^2+1=0$ となり，

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-r^2+\frac{3}{4}=0 \cdots\cdots\cdots③$$

③はともに $y>1$ である実数解をもたないことから，C と D が共有点をもたない条件は，③が実数解をもたないこと，すなわち $-r^2+\frac{3}{4}>0$ から $\left(r+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$ となる。

すると，$r>0$ より，$0<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(2)　D 上の点 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における接線 l の方程式は，

$$(r\cos\theta)x+(r\sin\theta)y=r^2,\ \ x\cos\theta+y\sin\theta=r$$

$0<\theta<\pi$ から，$y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}$ ………④

ここで，①④を連立すると，$-x^2+1=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}$ となり，

$$x^2-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}-1=0$$

この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$\alpha+\beta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$，$\alpha\beta=\frac{r}{\sin\theta}-1$ となる。

さて，l と C で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(-x^2+1)-\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}\right)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-4\left(\frac{r}{\sin\theta}-1\right)\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+4\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+3\right)^{\frac{3}{2}}$$

［解　説］

1/6 公式が有効な定積分と面積についての頻出問題です。