1

解答解説のページへ

$m,\ n$ を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

2

解答解説のページへ

数直線上を動く点 P がある。点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$0 \leqq x_n \leqq 3$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とし，$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$，$\angle\mathrm{AOB}=\gamma$ とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとり，辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ が垂直になるようにとる。$\angle\mathrm{DCE}=\theta$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\cos\alpha$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\cos\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\cos\theta$ を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ を用いて表せ。

(3)　$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき，$\mathrm{CP}=\dfrac{1}{\tan\gamma}$ となることを示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

座標平面上で，線分 $S: x+y=1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ と曲線 $C: \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で囲まれた図形 D を考える。S 上に点 $(0,\ 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき，$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である。また，点 P を通り，直線 $x+y=1$ と垂直に交わる直線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2) 直線 l と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3) 図形 D を直線 $x+y=1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　正の整数 m で，$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$

これより，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。

(2)　(1)より，$x^{3m}-1=(x-1)(x^2+x+1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ となり，ここで $q(x)=(x-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ とおくと，

$$x^{3m}-1=(x^2+x+1)q(x)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りについて，n の値で場合分けをすると，

(i)　$n=3m$ のとき　①より，余りは 0 である。

(ii)　$n=3m+1$ のとき　$x^{3m+1}-1=x\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$x^{3m+1}-1=x\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{xq(x)\}+x-1$$

これより，余りは $x-1$ である。

(iii)　$n=3m+2$ のとき　$x^{3m+2}-1=x^2\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$\begin{aligned}x^{3m+2}-1&=x^2\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+x^2-1\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+(x^2+x+1)\cdot1-x-2\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)+1\}-x-2\end{aligned}$$

これより，余りは $-x-2$ である。

なお，$n=1$ のときは，$x-1=(x^2+x+1)\cdot0+x-1$ より余りは $x-1$，$n=2$ のときは，$x^2-1=(x^2+x+1)\cdot1-x-2$ より余りは $-x-2$ である。

以上より，$\mathrm{mod}\,3$ で n を記述すると，

$n\equiv0$ のとき余り 0，$n\equiv1$ のとき余り $x-1$，$n\equiv2$ のとき余り $-x-2$

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った商を $p(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)p(x)+(ax+b)$$

ここで，$x=-t$ とおくと，$t^{2024}-1=(t^2+t+1)p(-t)+(-at+b)\cdots\cdots\cdots②$

さて，$2024=3\times674+2$ から $2024\equiv2$ となり，(2)の結果を②に適用すると，

$$-at+b=-t-2$$

よって，$a=1$，$b=-2$ から，$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りは $x-2$ である。

［解　説］

整式の除法を題材にした問題です。1 の虚立方根 ω を利用する方法も考えられますが，ここでは設問の流れを重視した解法で記述しました。

2

問題のページへ

数直線上の原点 O を出発して，コインの表が出たら $+1$，裏が出たら -1 だけ進む点 P について，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。

(1)　コインを 10 回投げ $x_{10}=0$ となるのは，表と裏が 5 回ずつのときで，その確率は，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 7}{2^{10}}=\frac{63}{256} $$

(2)　$x_5=1$ となるのは，表が 3 回，裏が 2 回のときで，その確率は，

$$ {}_{5}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\cdot 5}{2^5}=\frac{5}{16} $$

$x_5=1$ のもとで $x_{10}=0$ となるのは，表が 2 回，裏が 3 回のときで，その確率は，

$$ {}_{5}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2\cdot 5}{2^5}=\frac{5}{16} $$

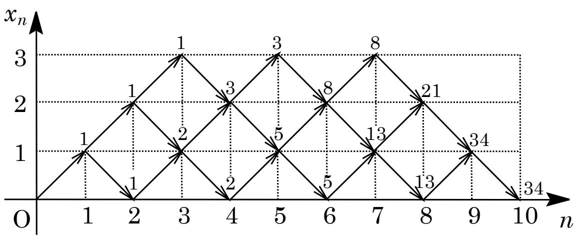
これより，$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，$\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{25}{256}$ となる。

したがって，$x_5\neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，(1)の結果から，

$$ \frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128} $$

(3)　$0\leqq x_n\leqq 3$ ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$) かつ $x_{10}=0$ となるのは，右図の 34 通りの経路が対応するので，その確率は，

$$ 34\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{17}{512} $$

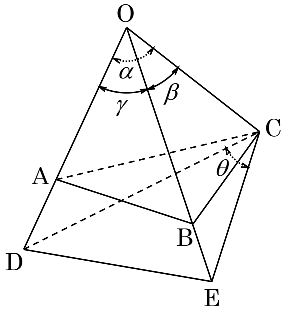


［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)では，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ の場合にきつい条件が課されているので，図で網羅して数えました。

3

問題のページへ



(1)　四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\gamma,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\cos\beta,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\alpha$$

ここで，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=k\vec{a}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\vec{c}\cdot(k\vec{a}-\vec{c})=0$ となり，$k\cos\alpha-1=0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\alpha>0$ なので，$k=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，l を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=l\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=l\vec{b}-\vec{c}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ から，

$$\vec{c}\cdot(l\vec{b}-\vec{c})=0,\ l\cos\beta-1=0$$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\beta>0$ なので，$l=\dfrac{1}{\cos\beta}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2)　①から，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2=\left|\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

②から，$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=\left|\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{\cos^2\beta}-\dfrac{2}{\cos\beta}\cdot\cos\beta+1=\dfrac{1}{\cos^2\beta}-1=\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta}{\cos\beta}+1$$

$$=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$\angle\mathrm{DCE}=\theta$ から，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|}$ となり，

$$\cos\theta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

(3)　$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ から $\cos\theta=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ であるので，

$$\triangle\mathrm{CDE}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\beta$$

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ から，$\triangle\mathrm{CDE}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ から，直線 OC は平面 CDE に垂直であり，ここで四面体 ODEC の体積を V とおくと，

$$V=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{CDE})\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{1}{\cos\alpha}|\vec{a}|=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\dfrac{1}{\cos\beta}|\vec{b}|=\dfrac{1}{\cos\beta}$ より，

$$\triangle\mathrm{ODE}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\sin\gamma=\frac{\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma}=\frac{1}{2}\tan\gamma$$

点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とすると,

$$V=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{ODE})\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan\gamma\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{6}\mathrm{CP}\tan\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

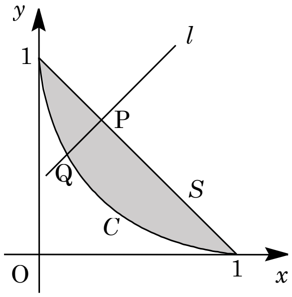
③④から, $\frac{1}{6}\mathrm{CP}\tan\gamma=\frac{1}{6}$ となり, $\mathrm{CP}=\frac{1}{\tan\gamma}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの応用についての標準的な問題です。(3)は, 与えられた条件から, 体積を利用する方法で記述しました。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　線分 $S: x+y=1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ 上で点 $(0,\ 1)$ からの距離が t となる点 P の座標は，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\Big)$ である。

P を通り S に垂直に交わる直線 l の方程式は，

$$y-\Big(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)=1\cdot\Big(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\Big),\quad y=x-\sqrt{2}t+1$$

(2)　l と曲線 $C: \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ すなわち $y=(1-\sqrt{x})^2$ の交点を Q とすると，$x-\sqrt{2}t+1=(1-\sqrt{x})^2$ から，

$$x-\sqrt{2}t+1=1-2\sqrt{x}+x,\quad 2\sqrt{x}=\sqrt{2}t$$

すると，$\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$ から $x=\dfrac{t^2}{2}$ となり，l の傾きは 1 であることに注意すると，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t^2}{2}\Big)=t-\frac{t^2}{\sqrt{2}}$$

(3)　S と C で囲まれた図形 D を直線 $x+y=1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とおくと，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi\mathrm{PQ}^2dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(t^2-\sqrt{2}t^3+\frac{t^4}{2}\Big)dt=\pi\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}t^4+\frac{t^5}{10}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\Big(\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 4+\frac{1}{10}\cdot 4\sqrt{2}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi$$

［解　説］

斜回転体の体積を誘導つきで求める問題です。過去には，2003 年と 2019 年に類題が出ており，合わせて演習すべき頻出題です。