

1

[解答例のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $3x + 11y = 1$ の整数解の 1 つを求めよ。
- (2) 方程式 $3x + 11y = 1000$ の整数解をすべて求めよ。
- (3) x, y が(2)の方程式の整数解であるとする。 $|x - y|$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

2[解答例のページへ](#)

x, y を実数とする。 θ の関数 $f(\theta) = \cos 2\theta + x \sin \theta - y - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を考える。

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ の最大値を x, y を用いて表せ。
- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について不等式 $f(\theta) < 0$ が成り立つような点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ。

3[解答例のページへ](#)

関数 $y = 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1})^2 - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1})$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき、関数 t の最小値と、そのときの x の値を求めよ。
- (2) 関数 y を(1)で与えた t の式で表せ。
- (3) 関数 y が最小となるときの x の値を求めよ。

4

解答例のページへ

xyz 空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。ただし, n は 2 以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ を平面 $x = k$ で切ったとき, 断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし, k は整数で $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) (1)の三角形 T_k の内部に含まれ, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし, 辺および頂点は内部に含まれないとする。
- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれ, x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし, 面, 辺, および頂点は内部に含まれないとする。

1

問題のページへ

(1) $3x + 11y = 1$ に対して $3 \cdot 4 + 11 \cdot (-1) = 1$ より、整数解の 1 つは $(x, y) = (4, -1)$

(2) $3x + 11y = 1000$ に対して、(1)から $3 \cdot 4000 + 11 \cdot (-1000) = 1000$ より、

$$3(x - 4000) + 11(y + 1000) = 0, \quad 3(x - 4000) = -11(y + 1000)$$

3 と 11 は互いに素なので、 $x - 4000 = 11k$, $y + 1000 = -3k$ (k は整数) となり、

$$x = 11k + 4000, \quad y = -3k - 1000$$

(3) (2)から、 $|x - y| = |(11k + 4000) - (-3k - 1000)| = |14k + 5000|$

ここで、 $14k + 5000 = 0$ とおくと $k = -357 - \frac{1}{7}$ となり、これより $k = -357$ のとき、 $|x - y|$ は最小値 $|14 \cdot (-357) + 5000| = 2$ をとる。また、このとき、

$$x = 11 \cdot (-357) + 4000 = 73, \quad y = -3 \cdot (-357) - 1000 = 71$$

[コメント]

頻出タイプの不定方程式を解く基本題です。

2

問題のページへ

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ において, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ となり,

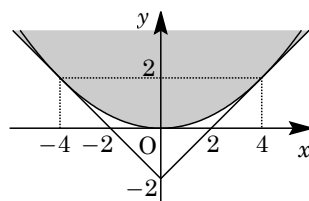
$$f(\theta) = \cos 2\theta + x \sin \theta - y - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta + x \sin \theta - y - 1$$

$$= -2\sin^2 \theta + x \sin \theta - y = -2\left(\sin \theta - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} - y$$

(i) $\frac{x}{4} < -1$ ($x < -4$) のとき $\sin \theta = -1$ において最大値 $-x - y - 2$ をとる。(ii) $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ ($-4 \leq x \leq 4$) のとき $\sin \theta = \frac{x}{4}$ において最大値 $\frac{x^2}{8} - y$ をとる。(iii) $\frac{x}{4} > 1$ ($x > 4$) のとき $\sin \theta = 1$ において最大値 $x - y - 2$ をとる。(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について $f(\theta) < 0$ が成り立つ条件は, (1) から,(i) $x < -4$ のとき $-x - y - 2 < 0$ から $y > -x - 2$ (ii) $-4 \leq x \leq 4$ のとき $\frac{x^2}{8} - y < 0$ から $y > \frac{x^2}{8}$ (iii) $x > 4$ のとき $x - y - 2 < 0$ から $y > x - 2$

(i)~(iii)より, 求める領域は右図の網点部である。

ただし, 境界は領域に含まない。

**[コメント]**

三角関数を題材とした基本題です。(1)から(2)へとストレートにつながります。

3

問題のページへ

- (1)
- $t = 2^x + 2^{-x}$
- に対して、相加平均と相乗平均の関係より、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ ，すなわち $x = 0$ のときに成立する。

よって、 t は $x = 0$ のとき最小値 2 をとる。

- (2)
- $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$
- となり、

$$16^x + 16^{-x} = (4^x + 4^{-x})^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

また、 $2^{x+1} + 2^{-x+1} = 2(2^x + 2^{-x}) = 2t$ ， $2^{x-1} + 2^{-x-1} = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) = \frac{1}{2}t$ から、

$$\begin{aligned} y &= 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1})^2 - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1}) \\ &= t^4 - 4t^2 + 2 + (2t)^2 - \frac{125}{2}t = t^4 - \frac{125}{2}t + 2 \end{aligned}$$

- (3) (2) より、
- $y' = 4t^3 - \frac{125}{2} = \frac{1}{2}(8t^3 - 125) = \frac{1}{2}(2t - 5)(4t^2 + 10t + 25)$

これより、 $t \geq 2$ において $4t^2 + 10t + 25 > 0$ から、 y の値の増減は右表のようになる。

すると、 $t = \frac{5}{2}$ のとき関数 y は最小となり、このとき、

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}, \quad 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

したがって、 $(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$ から、 $x = -1, 1$ である。

t	2	...	$\frac{5}{2}$	...
y'		-	0	+
y		$\searrow$		$\nearrow$

[コメント]

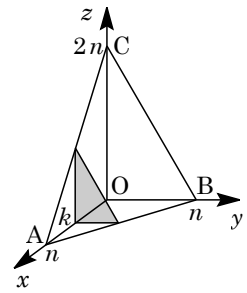
指数関数を題材とした基本題です。(1)の誘導に従い丁寧に計算することが要点です。

4

問題のページへ

- (1) 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を, 平面 $x = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) で切ったとき, 断面の三角形 T_k の頂点について,

- 平面 $x = k$ と辺 $OA: y = z = 0$ の交点の座標は, $(k, 0, 0)$
- 平面 $x = k$ と辺 $AB: y = n - x$ かつ $z = 0$ の交点の座標は,
 $(k, n - k, 0)$
- 平面 $x = k$ と辺 $AC: z = 2n - 2x$ かつ $y = 0$ の交点の座標は,
 $(k, 0, 2n - 2k)$



- (2) 整数 l ($1 \leq l \leq n - k - 1$) に対し, 線分 $y = l$ 上で三角形 T_k の内部にある格子点は, $2n - 2k - 2l - 1$ 個ある。

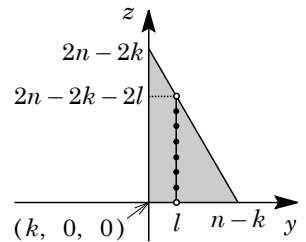
そこで, 三角形 T_k の内部に含まれる格子点の個数を M_k とおくと,

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{l=1}^{n-k-1} (2n - 2k - 2l - 1) \\ &= (2n - 2k - 1)(n - k - 1) - 2 \cdot \frac{1}{2} (n - k - 1)(n - k) \\ &= (n - k - 1) \{ (2n - 2k - 1) - (n - k) \} = (n - k - 1)^2 \end{aligned}$$

- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれる格子点の個数を N とおくと, $n \geq 3$ において,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{n-1} M_k = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k - 1)^2 = (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + \cdots + 1^2 + 0^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} i^2 = \frac{1}{6} (n - 2)(n - 1)(2n - 3) \end{aligned}$$

$n = 2$ をあてはめると $N = 0$ となり, このときも成り立っている。



[コメント]

四面体の内部にある格子点の個数を数える頻出題です。誘導が付いていますが, やや面倒な計算も現れてきます。