$\boxed{1}$

解答例のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $3x+11y=1$ の整数解の 1 つを求めよ。

(2)　方程式 $3x+11y=1000$ の整数解をすべて求めよ。

(3)　自然数 $x,\ y$ が(2)の方程式を満たすとする。$|x-y|$ の最大値と，そのときの $x,\ y$ の値を求めよ。

2

解答例のページへ

xyz 空間における 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(n,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ n,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2n)$ を頂点とする四面体 OABC を考える。ただし, n は 2 以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC を平面 $x=k$ で切ったとき, 断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし, k は整数で $1 \leqq k \leqq n-1$ とする。

(2) (1)の三角形 T_k の内部に含まれ, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし, 辺および頂点は内部に含まれないとする。

(3) 四面体 OABC の内部に含まれ, x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし, 面, 辺, および頂点は内部に含まれないとする。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

xy 平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$ と，円 $C: x^2+y^2=4$ 上を動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があるとする。各点 P に対して，線分 AP の垂直二等分線を l_{P} とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l_{P} の方程式を求めよ。

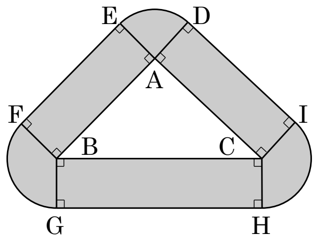
(2)　直線 OP と l_{P} が平行であるとき，P の座標を求めよ。

(3)　直線 OP と l_{P} が交点をもつとき，交点 Q の軌跡の方程式を求め，さらにその軌跡を図示せよ。

4

解答例のページへ

右図のように，三角形 ABC の外側で頂点または辺上の点からの距離が 1 以内にある，長方形および扇形からなる領域を Z とする。さらに，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=3$ とし，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおく。また，Z の面積を S_1 とする。以下の問いに答えよ。



(1)　S_1 を求めよ。

(2)　三角形 ABC の内接円の半径 $r(\theta)$ を求めよ。

(3)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，(2)の $r(\theta)$ の最大値を求めよ。

(4)　(2)の内接円の面積を S_2 とする。$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$S_1>S_2$ を示せ。

1 問題のページへ

(1)　$3x+11y=1$ に対して $3\cdot 4+11\cdot(-1)=1$ より，整数解の 1 つは $(x,\ y)=(4,\ -1)$

(2)　$3x+11y=1000$ に対して，(1)から $3\cdot 4000+11\cdot(-1000)=1000$ より，

$$3(x-4000)+11(y+1000)=0,\ 3(x-4000)=-11(y+1000)$$

3 と 11 は互いに素なので，$x-4000=11k$，$y+1000=-3k$ (k は整数)となり，

$$x=11k+4000,\ y=-3k-1000$$

(3)　(2)から，$|x-y|=|(11k+4000)-(-3k-1000)|=|14k+5000|\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，x, y は自然数より，$x=11k+4000\geqq 1$ かつ $y=-3k-1000\geqq 1$ より，

$$-\frac{3999}{11}\leqq k\leqq -\frac{1001}{3},\ -363-\frac{6}{11}\leqq k\leqq -333-\frac{2}{3}$$

k は整数より $-363\leqq k\leqq -334$ となり，$-82\leqq 14k+5000\leqq 324$

すると，(*)から $k=-334$ のとき $|x-y|$ は最大値 324 をとり，このとき，

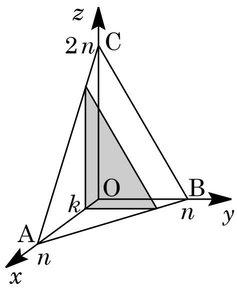
$$x=11\cdot(-334)+4000=326,\ y=-3\cdot(-334)-1000=2$$

［コメント］

頻出タイプの不定方程式を解く基本題です。ただ，(3)は数値計算がやや面倒です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



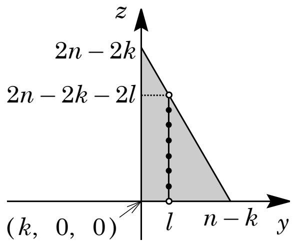
(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(n,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ n,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2n)$ を頂点とする四面体 OABC を，平面 $x=k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ で切ったとき，断面の三角形 T_k の頂点について，

・平面 $x=k$ と辺 OA : $y=z=0$ の交点の座標は，$(k,\ 0,\ 0)$

・平面 $x=k$ と辺 AB : $y=n-x$ かつ $z=0$ の交点の座標は，
　$(k,\ n-k,\ 0)$

・平面 $x=k$ と辺 AC : $z=2n-2x$ かつ $y=0$ の交点の座標は，
　$(k,\ 0,\ 2n-2k)$

(2)　整数 l $(1\leqq l\leqq n-k-1)$ に対し，線分 $y=l$ 上で三角形 T_k の内部にある格子点は，$2n-2k-2l-1$ 個ある。



そこで，三角形 T_k の内部に含まれる格子点の個数を M_k とおくと，

$$M_k=\sum_{l=1}^{n-k-1}(2n-2k-2l-1)$$
$$=(2n-2k-1)(n-k-1)-2\cdot\frac{1}{2}(n-k-1)(n-k)$$
$$=(n-k-1)\{(2n-2k-1)-(n-k)\}=(n-k-1)^2$$

(3)　四面体 OABC の内部に含まれる格子点の個数を N とおくと，$n\geqq 3$ において，

$$N=\sum_{k=1}^{n-1}M_k=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=(n-2)^2+(n-1)^2+\cdots+1^2+0^2$$
$$=\sum_{i=0}^{n-2}i^2=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)$$

$n=2$ をあてはめると $N=0$ となり，このときも成り立っている。

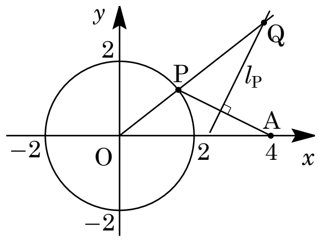
［コメント］

四面体の内部にある格子点の個数を数える頻出題です。誘導が付いていますが，やや面倒な計算も現れてきます。

3

問題のページへ

(1) 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ と円 $C: x^2+y^2=4$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対し，線分 AP の垂直二等分線 l_{P} は，AP の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ を通り，法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-4,\ b)$ より，その方程式は，$(a-4)\left(x-\dfrac{a+4}{2}\right)+b\left(y-\dfrac{b}{2}\right)=0$ から，



$$(a-4)x+by-\frac{a^2-16+b^2}{2}=0$$

すると，$a^2+b^2=4$ ……①より，$l_{\mathrm{P}}: (a-4)x+by+6=0$ ………②

(2) 直線 OP と l_{P} が平行であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ となり，

$$a(a-4)+b^2=0,\ a^2-4a+b^2=0$$

①より，$4-4a=0$ から $a=1$ となり，$b=\pm\sqrt{4-1}=\pm\sqrt{3}$

これより，$\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$ または $\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$ となる。

(3) 直線 OP は法線ベクトルを $\vec{n}=(b,\ -a)$ とすることができるので，

$$\mathrm{OP}: bx-ay=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，直線 OP と l_{P} の交点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の軌跡の方程式は，②③より，

$$xa+yb=4x-6\ \cdots\cdots\cdots ②',\quad -ya+xb=0\ \cdots\cdots\cdots ③'$$

$②'\times x-③'\times y$ より，$(x^2+y^2)a=x(4x-6)$

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は②′を満たさないので，$a=\dfrac{2x(2x-3)}{x^2+y^2}$ ………④

$②'\times y+③'\times x$ より，$(y^2+x^2)b=y(4x-6)$ となり，$b=\dfrac{2y(2x-3)}{x^2+y^2}$ ………⑤

④⑤を①に代入し，$\dfrac{4x^2(2x-3)^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{4y^2(2x-3)^2}{(x^2+y^2)^2}=4$ から，

$$\frac{4(x^2+y^2)(2x-3)^2}{(x^2+y^2)^2}=4,\ (2x-3)^2=x^2+y^2\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

このとき，⑥は $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ を満たしている。

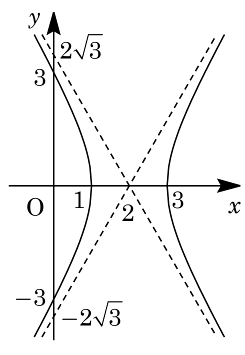
さらに，⑥を変形すると，$3x^2-12x-y^2=-9$ から，

$$3(x-2)^2-y^2=3$$

したがって，点 Q の軌跡の方程式は，

$$双曲線: (x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$

なお，漸近線は $y=\pm\sqrt{3}(x-2)$ であるので，点 Q の軌跡を図示すると，右図の実線のようになる。

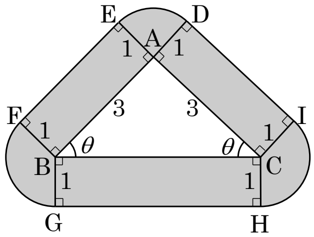


［コメント］

軌跡が双曲線になる問題です。(3)では②③をまとめて x, y をそれぞれ a, b で表した後, ①式を用いて a, b を消去しても構いません。

4

問題のページへ



(1)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ のとき，$\angle\mathrm{ACB}=\theta$ となり，このとき右図の網点部の領域 Z の面積を S_1 とする。

3 つの扇形の中心角について，$\angle\mathrm{FBG}=\angle\mathrm{HCI}=\pi-\theta$，$\angle\mathrm{DAE}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\pi-(\pi-2\theta)=2\theta$ から，

$$\angle\mathrm{DAE}+\angle\mathrm{FBG}+\angle\mathrm{HCI}=2\theta+2(\pi-\theta)=2\pi$$

そして，$\mathrm{BC}=2\cdot3\cos\theta=6\cos\theta$ より，

$$S_1=\pi\cdot1^2+(3+3+6\cos\theta)\cdot1=6\cos\theta+\pi+6$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot6\cos\theta\cdot3\sin\theta=9\sin\theta\cos\theta$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を $r(\theta)$ とすると，

$$\frac{1}{2}(3+3+6\cos\theta)\cdot r(\theta)=9\sin\theta\cos\theta$$

これより，$r(\theta)=\dfrac{9\sin\theta\cos\theta}{3+3\cos\theta}=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$ となる。

(3)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，(2)から，

$$r'(\theta)=3\cdot\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=3\cdot\frac{(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+\cos\theta(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=3\cdot\frac{(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}=3\cdot\frac{\cos^2\theta+\cos\theta-1}{1+\cos\theta}$$

ここで，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\cos\theta<1$ より，$\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}>0$ となり，これより $r'(\theta)>0$ から $r(\theta)$ は単調に増加する。

したがって，$r(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{3(2-\sqrt{2})}{2}$ をとる。

(4)　内接円の面積を S_2 とすると，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，(3)から $3<2+\sqrt{2}$ に注意すると，

$$S_2=\pi\{r(\theta)\}^2\leqq\pi\Big(\frac{3}{2+\sqrt{2}}\Big)^2<\pi\cdot1^2=\pi$$

また，(1)から，$S_1=6(1+\cos\theta)+\pi>\pi$ となるので，$S_1>S_2$ である。

［コメント］

図形の計量問題に微分を融合した問題です。(4)はアバウトに評価しましたが，S_1 の最小値が S_2 の最大値より大であることを示す方法もあります。