1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は初項と漸化式$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$で定義されている。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$f(x) = -ax(x-2b)$ とする。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ の頂点 P が直線 $3x + 2y = 6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$ とする。ただし a は定数とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，常に $f(x) \geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

点 A は原点 O から出発して，サイコロを振って出た目に応じて複素平面上を動く。ただし, A の表す複素数が z のとき，出た目が k $(1 \leqq k \leqq 6)$ であれば, A は

$z+\cos\dfrac{(k-1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(k-1)\pi}{3}$ を表す点に移るものとする。

(1)　サイコロを 2 回振ったときに, A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ。

(2)　サイコロを 3 回振ったときに, A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ。

(3)　サイコロを 4 回振ったときに，はじめて A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}=2a_n+n-1$ ………①

①をみたす等差数列を $\{\alpha n+\beta\}$ とすると，

$$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+n-1,\ \ \alpha n+\alpha+\beta=(2\alpha+1)n+2\beta-1$$

任意の n に対して成立することより，

$$\alpha=2\alpha+1,\ \ \alpha+\beta=2\beta-1$$

よって，$\alpha=-1$，$\beta=0$

すると，$-(n+1)=2(-n)+n-1$ ………②

①－②より，$a_{n+1}+n+1=2(a_n+n)$

$$a_n+n=(a_1+1)2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$a_n=2^n-n$$

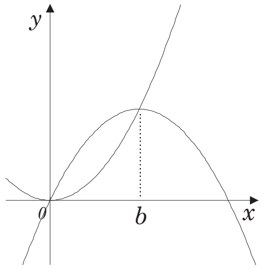
(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-k)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-2$

［解 説］

(1)の漸化式は，階差数列をつくる方法など，いろいろな解法がありますが，最も簡明なのは上記の方法です。このように特殊解を考えて等比数列に帰着させるという考え方は，汎用性があります。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$y=-ax(x-2b)$ と $y=ax^2$ の交点は,

$-ax^2+2abx=ax^2$，$2ax^2-2abx=0$ より，$x=0$，b

よって，$S=\int_0^b -(2ax^2-2abx)\,dx$

$$=-2a\int_0^b x(x-b)\,dx$$

$$=-2a\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)b^3=\frac{1}{3}ab^3\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$f(x)=-ax(x-2b)=-a(x-b)^2+ab^2$

これより，$\mathrm{P}(b,\ ab^2)$ となり，点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるので,

$$3b+2ab^2=6\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$a=\dfrac{6-3b}{2b^2}$ となり，これを①に代入すると,

$$S=\frac{1}{3}\cdot\frac{6-3b}{2b^2}\cdot b^3=-\frac{1}{2}(b^2-2b)=-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}$$

以上より，$b=1$，②から $a=\dfrac{3}{2}$ のとき, S は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

[解　説]

数Ⅱの積分の基本題です。完答することが望まれる一題です。

3

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$

$f'(x)=3x^2+6ax+3(a^2-1)$

$=3(x^2+2ax+a^2-1)$

$=3(x+a+1)(x+a-1)$

x	$\cdots$	$-a-1$	$\cdots$	$-a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値 : $f(-a-1)=(-a-1)^2\{-a-1+3a+3(-a+1)\}=-(a+1)^2(a-2)$

極小値 : $f(-a+1)=(-a+1)^2\{-a+1+3a+3(-a-1)\}=-(a-1)^2(a+2)$

(2) $x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ の条件は，$f(0)=0$ から，

(i) $-a+1\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq f(0)=0$ となり，つねに成立する。

(ii) $-a+1>0$ $(a<1)$ のとき

$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq f(-a+1)=-(a-1)^2(a+2)$ となる。

よって，$-(a-1)^2(a+2)\geqq 0$

$a+2\leqq 0$ から，$a\leqq -2$ （$a<1$ をみたす)

(i)(ii)より，$a\leqq -2$，$1\leqq a$

［解 説］

前問に続き，数Ⅱの微分の基本題です。この微積分の 2 題は落とせません。

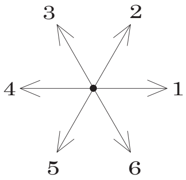
4

問題のページへ

(1)　1 回目の目を a, 2 回目の目を b とすると,

A が原点 O に戻ってくる場合は,

$$(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$$



よって, その確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times 6 = \dfrac{1}{6}$

(2)　(1)と同じく, 3 回目の目を c とすると, A が原点 O に戻ってくる場合は,

$a = 1$ のとき, $(b,\ c) = (3,\ 5),\ (5,\ 3)$ の 2 通りとなる。

a が他の値の場合も同様なので, 求める確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \times 2 \times 6 = \dfrac{1}{18}$

(3)　(1)(2)と同じく, 4 回目の目を d とすると, はじめて A が原点 O に戻ってくるのは, $a = 1$ のとき, 以下の場合となる。

$$(b,\ c,\ d) = (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 5\ \ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (3,\ 6,\ 4),\ (3,\ 4,\ 6),\ (5,\ 2,\ 4),\ (5,\ 4,\ 2),\ (6,\ 3,\ 4),\ (6,\ 4,\ 3)$$

a が他の値の場合も同様に 9 通りずつとなる。

よって, 求める確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 \times 9 \times 6 = \dfrac{1}{24}$

［解 説］

試験中に訂正があったのであれば別ですが, 本問は弧度法を全く知らない文系の受験者には解くことができません。出題ミスです。問題文中に「複素数平面」でなく,「複素平面」という記述を見ることからも, 出題者は二十数年前の感覚で作問したようです。昨年度はこんなことはなかったのですが。