1

解答解説のページへ

列ベクトル $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の内積を $u_1v_1+u_2v_2$ と定める。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする。

(1) 列ベクトル $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Ae_1, Ae_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(2) 列ベクトル $f_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Af_1, Af_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(3) A が(1), (2)の条件をみたすとき, 内積が 0 である任意の 2 つの列ベクトル u, v に対して, Au, Av の内積が 0 となることを示せ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=f(t)\cos t,\quad y(t)=f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし，$f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t=a$ から $t=b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1)　$L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(2)　$L\leqq\displaystyle\int_a^b\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$a=1$，$b=4$ のとき, (2)の不等式を用いて，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

曲線 C と D_a を次のように定める。

C： 放物線 $y = x^2$

D_a ： 中心が $(-1,\ a)$ で 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ と原点 O を通る円

(1) 不等式 $x>0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。

(2) 点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。$\angle\mathrm{APO}$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また，そのときの $\sin\angle\mathrm{APO}$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素平面上で $z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2 = -\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ とする。

(1)　z_1 を極形式で表せ。

(2)　z_2 を極形式で表せ。

(3)　原点O，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $Ae_1=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $Ae_2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$

条件より，$ab+cd=0$ ………①

(2) $Af_1=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$, $Af_2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}$

条件より，$(a+b)(a-b)+(c+d)(c-d)=0$

$a^2+c^2=b^2+d^2$ ………②

(3) $Au=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au_1+bu_2\\cu_1+du_2\end{pmatrix}$, $Av=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}av_1+bv_2\\cv_1+dv_2\end{pmatrix}$

条件より，$u_1v_1+u_2v_2=0$ ………③

このとき, Au と Av の内積は,

$(au_1+bu_2)(av_1+bv_2)+(cu_1+du_2)(cv_1+dv_2)$

$=(a^2+c^2)u_1v_1+(ab+cd)u_1v_2+(ab+cd)u_2v_1+(b^2+d^2)u_2v_2$

$=(a^2+c^2)(u_1v_1+u_2v_2)+(ab+cd)(u_1v_2+u_2v_1)$ （②より）

$=0$ （①, ③より）

［解 説］

(1)(2)の誘導の意味を考えると, (3)は成分計算をして, 第 1 問を着実にゲットするのが正しい態度です。

2

問題のページへ

(1) $\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=\{f'(t)\cos t-f(t)\sin t\}^2+\{f'(t)\sin t+f(t)\cos t\}^2$

$$=\{f'(t)\}^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+\{f(t)\}^2(\sin^2 t+\cos^2 t)$$

$$=\{f'(t)\}^2+\{f(t)\}^2$$

よって，$L=\int_a^b\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$

(2) $\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2\leqq\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2+2|f(t)||f'(t)|$

$$=\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)^2$$

$$\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\leqq|f(t)|+|f'(t)|$$

$a\leqq b$ より，$L=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt\leqq\int_a^b\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt$

(3) $f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ から，

$$\int_1^4\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt=\int_1^4\left(e^{-\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\int_1^2\left(e^{-s}+\frac{1}{2s}e^{-s}\right)2s\,ds\quad(s=\sqrt{t}\text{ とおく})$$

$$=\int_1^2(2s+1)e^{-s}\,ds=-\Big[(2s+1)e^{-s}\Big]_1^2+\int_1^2 2e^{-s}\,ds$$

$$=-\left(\frac{5}{e^2}-\frac{3}{e}\right)-2\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{5}{e}-\frac{7}{e^2}$$

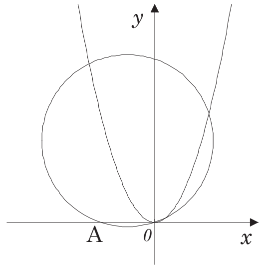
よって, (2)より，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$

［解 説］

(2)についても(1)との対比で証明は難しくなく，(3)は部分積分の計算だけなので，見かけよりはかなり簡単です。

3

問題のページへ



(1)　$C: y = x^2$ ………①

また，$D_a : (x+1)^2 + (y-a)^2 = 1 + a^2$ より，

$x^2 + y^2 + 2x - 2ay = 0$ ………②

①を②に代入して，

$x^4 + (1-2a)x^2 + 2x = 0$

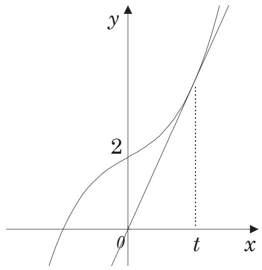
$x = 0,\quad x^3 + (1-2a)x + 2 = 0$ ………③

条件より，③が $x > 0$ で解をもつので，③を変形して，$x^3 + x + 2 = 2ax$

$f(x) = x^3 + x + 2$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 1$，$f''(x) = 6x$

$f(x)$ は単調増加で，曲線 $y = f(x)$ は，$x < 0$ で上に凸，$x > 0$ で下に凸。

$y = f(x)$ と $y = 2ax$ が接するとき，



接点を $x = t$ とするとき，

$f(t) = 2at$ より，$t^3 + t + 2 = 2at$ ………④

$f'(t) = 2a$ より，$3t^2 + 1 = 2a$ ………⑤

⑤を④に代入して，$t^3 + t + 2 = t(3t^2 + 1)$

$2t^3 - 2 = 0$，$t = 1$

⑤より，$a = 2$

求める条件は，図より $a \geqq 2$

(2)　2 定点 O, A を通る円の半径が大きくなるに従って，弧 OA に対する鋭角の円周角は小さくなっていくことより，C と D_a が接するとき $\angle\mathrm{APO}$ は最大となる。

このとき(1)より，$a = 2$ で $t = 1$，すなわち P(1,　1) となる。

また，D_a の中心は $(-1,\ 2)$，半径は $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ となる。

正弦定理を用いて，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle\mathrm{APO}} = 2\sqrt{5},\quad \sin\angle\mathrm{APO} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

［解 説］

(1)の利用を考えると，(2)を図形的に考えるのは当然です。しかし，図形的な性質をどこまで定量的に記述すればよいのか迷います。上の解の(2)の冒頭の 2 行がその一例で，正弦定理を用いての記述も可能ですが，ここでは定性的な表現をしました。本年の東京工大の第 2 問の解でも同じように感じたのを思い出します。

4

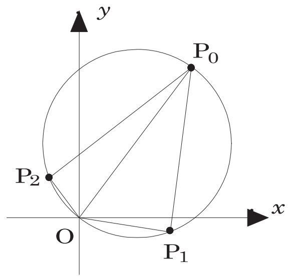
問題のページへ

(1)　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

(2)　$z_2=-\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{\cos\pi+i\sin\pi}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}$

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi-\theta$



$\angle P_0OP_1=\theta-\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ で，

$OP_0=2$，$OP_1=1$ から，$\angle OP_1P_0=\dfrac{\pi}{2}$

よって，OP_0 は円の直径となり，$\angle OP_2P_0=\dfrac{\pi}{2}$

ここで，$\angle P_0OP_2=(\pi-\theta)-\theta=\pi-2\theta$ で，

$OP_0=2$，$OP_2=\dfrac{1}{2}$ から，

$$\cos(\pi-2\theta)=\frac{OP_2}{OP_0}=\frac{1}{4}$$

よって，$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4}$，$2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

以上より，$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

［解 説］

(3)では，最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが，たいへんな計算が待ち構えていました。そこで，これは何か特別な事情があると推測したところ，やはりその通りでした。この発見がポイントです。