1

解答解説のページへ

$0° < \theta < 90°$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ。

(2)　この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

2 つの複素数α，βが，条件$\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$，$|\alpha+\beta|=3$を満たしているとき，次の問いに答えよ。

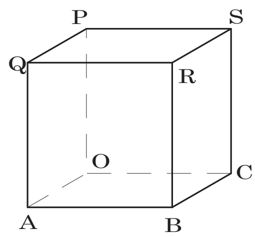
(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$の偏角θを求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$とする。

(2) αの絶対値を求めよ。

(3) 複素数平面上で，α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ



辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q，R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$ ………①

条件より，①の判別式 $D/4=4\sin^4\theta-(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=0$

$$4\sin^4\theta-\sin^2\theta=0,\ \ \sin^2\theta(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

$0°<\theta<90°$ より $0<\sin\theta<1$ なので，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，$\theta=30°$

このとき，①の重解は，$x=\dfrac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=-2(1+\cos\theta)=-2-\sqrt{3}$

(2)　①の左辺を $f(x)$ とおくと，放物線 $y=f(x)$ の軸は，

$$x=\frac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=-2(1+\cos\theta)$$

$0°<\theta<90°$ より $0<\cos\theta<1$ なので，$-2(1+\cos\theta)<-2$

したがって，$f(x)=0$ すなわち①は，-1 以上に 2 つの解をもつ場合はないので，①が -1 以上の解をもつ条件は $f(-1)\leqq 0$ となる。

$$(1-\cos\theta)-4\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\leqq 0,\ \ 2\sin^2\theta-1\geqq 0$$

$0°<\theta<90°$ より $0<\sin\theta<1$ なので，$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$45°\leqq\theta<90°$

［解　説］

(2)の題意は，少なくとも 1 つの解が -1 以上ということなので，解の個数が 1 個のときと 2 個のときで場合分けをしようと，まず考えました。ところが，軸に注目すると, 2 個の場合はありませんでした。

2

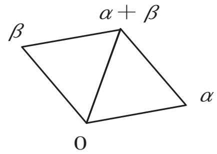
問題のページへ

(1)　$\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$ で $\alpha\neq 0$ より，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm120^\circ)+i\sin(\pm120^\circ)$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ は $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$\theta=120^\circ$，240°

(2)　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=1$，$|\alpha|=|\beta|$

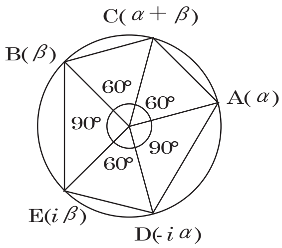


すると, 4 点 0，α，$\alpha+\beta$，β を結ぶ四角形はひし形となり, しかも(1)より，3 点 0，α，$\alpha+\beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。

条件より $|\alpha+\beta|=3$ なので，$|\alpha|=|\beta|=3$

(3)　点 $-i\alpha$ は点 α を原点まわりに -90° 回転した点, 点 $i\beta$ は点 β を原点まわりに 90° 回転した点である。

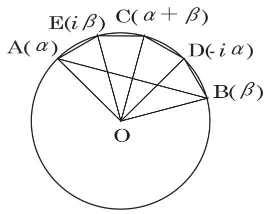
(i)　$\theta=120^\circ$ のとき



5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EOD}=60^\circ$ より，五角形 ACBED の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\sin60^\circ\right)\times3+\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\right)\times2=9+\frac{27}{4}\sqrt{3}$$

(ii)　$\theta=240^\circ$ のとき



5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{COE}=\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$ より，五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\sin30^\circ\right)\times4-\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\sin120^\circ=9-\frac{9}{4}\sqrt{3}$$

［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において, 位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。

3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

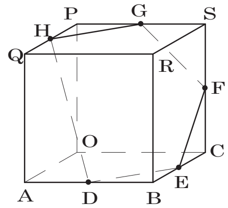
$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\ \ \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\ \ \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$，$\vec{c}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$\vec{a}=\vec{d}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)$

$$=\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$$



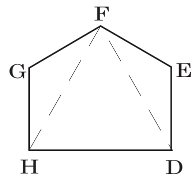
(2)　⑥より $\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}=1$ なので，点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より，$\vec{p}=\vec{g}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\right)=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\dfrac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より $\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{3}{2}=1$ なので，点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3)　五角形 DEFGH において，$\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ となり，また $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ より $\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$，さらに $\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$ なので，

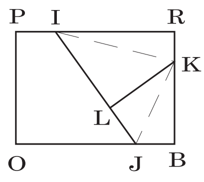


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は，$2\sqrt{3}\times 2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH, DE との交点をそれぞれ I, J とおくと，



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\ \ \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{KL}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{3}$

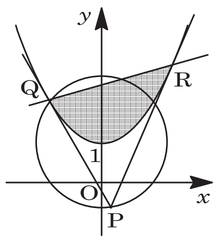
［解　説］

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

4

問題のページへ

円 $x^2+(y-1)^2=3$ ……①，放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ ……②



①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，$s^2+(t-1)^2=3$ ………③

②より，$y'=x$ なので，点 $\left(u,\ \dfrac{1}{2}u^2+1\right)$ における接線は，

$$y=u(x-u)+\frac{1}{2}u^2+1=ux-\frac{1}{2}u^2+1$$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るので，$t=us-\dfrac{1}{2}u^2+1$

$$u^2-2su+2t-2=0 \text{ ………④}$$

④が異なる 2 実数解をもつことより，$D/4=s^2-2t+2>0$

③より，$3-(t-1)^2-2t+2>0$，$4-t^2>0$

ここで，④の解 $u=s\pm\sqrt{s^2-2t+2}=s\pm\sqrt{4-t^2}$ を $u=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=s-\sqrt{4-t^2},\quad \beta=s+\sqrt{4-t^2}$$

線分 QR を $y=mx+n$ とすると，線分 QR と放物線で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(mx+n-\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{4-t^2}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4-t^2}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最大値 $\dfrac{2}{3}(\sqrt{4})^3=\dfrac{16}{3}$ をとる。

このとき③より，$\mathrm{P}(\pm\sqrt{2},\ 0)$ となる。

［解 説］

よくある構図の問題です。いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる典型題です。