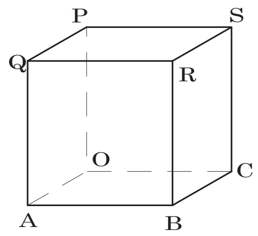
$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$n,\ k$ を自然数とする。等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①を満たす自然数 $x_1,\ x_2,\cdots,x_k$ の組の個数を $a(n,\ k)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば $(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$ と $(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$ とは別の組と考える。

(1) 式①における x_k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関係式 $a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$ が成り立つことを示せ。

(3) $a(n,\ 1)$，$a(n,\ 2)$，$a(n,\ 3)$，$a(n,\ 4)$ を求め，$a(n,\ k)$ を推定せよ。

(4) (3)において，$a(1,\ k)$，$a(2,\ k)$，…，$a(n,\ k)$ の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$ の推定が正しいことを証明せよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = ae^{x} + be^{-x}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(3) x についての方程式 $f(x) = 1$ の解のうち，$x \geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような a, b の範囲を ab 平面に図示せよ。

4

解答解説のページへ

a，b を実数とする。2 つの関数 $f(x)=\log(x^2+1)$，$g(x)=ax^2+b$ について次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ。

(3)　(2)の条件において，$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

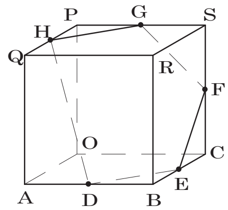
問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\ \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\ \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より，$\frac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$, $\vec{c}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$\vec{a}=\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$



よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)$

$$=\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$$

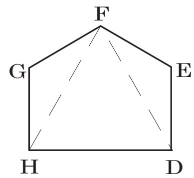
(2)　⑥より $\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$ なので，点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より，$\vec{p}=\vec{g}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\right)=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\frac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より $\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=1$ なので，点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3)　五角形 DEFGH において，$\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ となり，また $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ より $\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$，さらに $\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$ なので，

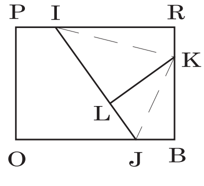


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sin60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は，$2\sqrt{3}\times2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH, DE との交点をそれぞれ I, J とおくと，



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\ \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot4-\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$, $\mathrm{KL}=\frac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\frac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{50}{3}$

［解　説］

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

2

問題のページへ

(1)　$x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①から, $k\geqq 2$ で,

$$x_k=n+k-1-(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})\ \cdots\cdots\text{②}$$

$x_i\geqq 1\ \ (1\leqq i\leqq k)$ なので, ②より $1\leqq x_k\leqq n+k-1-(k-1)=n$

$k=1$ のときは $x_1=n$ となるので, $k\geqq 2$ の場合と合わせて $1\leqq x_k\leqq n$ となる。

(2)　$a(n,\ k+1)$ は $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n+k$ を満たす自然数解の個数を表す。

ここで, (1)より $1\leqq x_{k+1}\leqq n$ なので, $x_{k+1}=n-j+1\ \ (1\leqq j\leqq n)$ のときは,

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+(n-j+1)=n+k,\ \ x_1+x_2+\cdots+x_k=j+k-1$$

となり, この式を満たす自然数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ の個数は $a(j,\ k)$ である。

したがって, $a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$

(3)　まず, $a(n,\ 1)$ は①より $x_1=n$ の解の個数より, $a(n,\ 1)=1$

(2)より, $a(n,\ 2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 1)=\sum_{j=1}^{n}1=n$

$$a(n,\ 3)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 2)=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$a(n,\ 4)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 3)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

以上より, $a(n,\ k)=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-2)}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!}$ と推測できる。

(4)　$1\leqq j\leqq n$ に対して, $a(j,\ k)=\dfrac{j(j+1)\cdots\cdots(j+k-2)}{(k-1)!}$ と仮定したとき,

$$a(n,\ k+1)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)\cdots(j+k-2)$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\{j(j+1)\cdots(j+k-2)(j+k-1)-(j-1)j\cdots(j+k-2)\}$$

$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)}{k!}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

［解 説］

おもしろい誘導のついた問題です。しかし, ①の自然数解の個数は○を $n+k-1$ 個並べ, その間の $n+k-2$ か所に $k-1$ 個の仕切りを 1 つずつ割り込ませるという有名な方法で直接的に求まってしまいます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=ae^x+be^{-x}$，$f'(x)=ae^x-be^{-x}=e^{-x}(ae^{2x}-b)$

$f'(x)=0$ の解は，$e^{2x}=\dfrac{b}{a}$ より $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$

$\alpha=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$ とおくと，$x=\alpha$ のとき $f(x)$ は極小かつ最小となるので，最小値は $e^\alpha=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ より，

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\alpha)=a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$$

(2)　まず，$f(2\alpha-x)=ae^{2\alpha-x}+be^{-2\alpha+x}=ae^{2\alpha}e^{-x}+be^{-2\alpha}e^x$

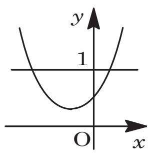
(1)より，$e^{2\alpha}=\dfrac{b}{a}$ なので，

$$f(2\alpha-x)=a\cdot\frac{b}{a}e^{-x}+b\cdot\frac{a}{b}e^x=be^{-x}+ae^x=f(x)$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\alpha$ に関して対称である。

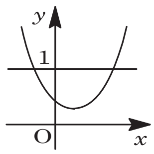
(3)　対称軸 $x=\alpha$ の位置で場合分けをする。

(i)　$\alpha\leqq 0$ $\left(0<\dfrac{b}{a}\leqq 1\right)$ のとき



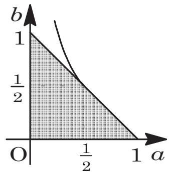
$f(0)=a+b$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b\leqq 1$ である。

(ii)　$\alpha>0$ $\left(\dfrac{b}{a}>1\right)$ のとき



$f(0)=a+b$，$f(\alpha)=2\sqrt{ab}$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b<1$ または $2\sqrt{ab}=1$，すなわち $a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ である。

(i)(ii)より，$a+b\leqq 1$ $(0<b\leqq a)$，$a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ $(b>a)$



求める a, b の範囲を図示すると右図のようになる。なお，領域の境界は $a+b=1$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a<1\right)$ のみを含む。

［解 説］

(2)の y 軸に平行なある直線というのは $x=\alpha$ しかないのが，(1)の増減表からわかります。それを数式を用いて示せば事足ります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

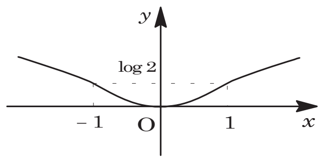
(1)　$f(x)=\log(x^2+1)$，$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

ここで，$f(-x)=f(x)$より，$y=f(x)$のグラフはy軸対称となるので，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\log 2$	$\nearrow$	∞

極小値0　$(x=0)$，変曲点$(\pm 1,\ \log 2)$



(2)　$y=g(x)$のグラフもy軸対称なので，2曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が接するとき，$\alpha\geqq 0$として，

$$f(\alpha)=g(\alpha)\cdots\cdots①,\quad f'(\alpha)=g'(\alpha)\cdots\cdots②$$

①より$\log(\alpha^2+1)=a\alpha^2+b\cdots\cdots③$，②より$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=2a\alpha\cdots\cdots④$

④から$a\alpha(\alpha^2+1)=\alpha$，$\alpha(a\alpha^2+a-1)=0\cdots\cdots\cdots⑤$

(i)　$\alpha=0$のとき　⑤は満たされており，③から$b=0$

(ii)　$\alpha>0$のとき　⑤から$a\alpha^2+a-1=0$，$a=0$とすると不成立なので$a\neq 0$

このとき，$\dfrac{1-a}{a}>0$すなわち$0<a<1$で，$\alpha^2=\dfrac{1-a}{a}$，$\alpha=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を③に代入して，$\log\left(\dfrac{1-a}{a}+1\right)=a\cdot\dfrac{1-a}{a}+b$，$b=a-1-\log a\cdots\cdots\cdots⑦$

(i)(ii)より，求める条件は，$b=0$（aは任意）または$b=a-1-\log a$　$(0<a<1)$

(3)　$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$のとき，⑥より$\alpha=\sqrt{3}$，⑦より$b=-\dfrac{3}{4}+\log 4$

このとき，$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$で$f(x)\leqq g(x)$より，求める面積を$S$とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}+\log 4-\log(x^2+1)\right\}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}+\log 4\right)dx=\frac{3\sqrt{3}}{12}+\left(-\frac{3}{4}+\log 4\right)\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\log(x^2+1)\,dx=\Big[x\log(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

また，$x=\tan\theta$と置換すると，

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2\sqrt{3}-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

以上より，$S=2\left\{-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4-\left(\sqrt{3}\log 4-2\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}=3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

［解　説］

微積分の総合問題です。確実な計算力が問われます。