1

解答解説のページへ

点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき, 三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

p, q を実数，$q \neq 0$ とする。$p+qi$（$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3+px+10=0$$

の解であるとき, p と q の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

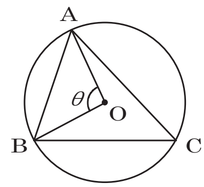
関数 $f(x)=x-2+3\left|x-1\right|$ を考える。$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。

1

問題のページへ



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=R$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$R^2+2R^2\cos\theta+R^2=R^2$$

$$2\cos\theta+1=0,\quad \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \theta=120^\circ$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，$2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と変形をすると，辺 AB の中点と頂点 C は O に関して反対側にあることになり，

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，同様にして，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$

よって，$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解　説］

ずいぶん前になりますが, 1992 年に京大で，類題が出ています。

2

問題のページへ

$x = p + qi$ が $x^3 + px + 10 = 0$ の解なので,

$$(p+qi)^3 + p(p+qi) + 10 = 0$$

$$(p^3 - 3pq^2 + p^2 + 10) + (3p^2q - q^3 + pq)i = 0$$

p, q が実数より,

$$p^3 - 3pq^2 + p^2 + 10 = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

$$3p^2q - q^3 + pq = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

②より, $q \neq 0$ なので, $3p^2 - q^2 + p = 0$, $q^2 = 3p^2 + p \cdots\cdots\cdots③$

①③より, $p^3 - 3p(3p^2 + p) + p^2 + 10 = 0$, $4p^3 + p^2 - 5 = 0$

$$(p-1)(4p^2 + 5p + 5) = 0$$

$4p^2 + 5p + 5 = 0$ の判別式 $D = 25 - 80 = -55 < 0$ より, 実数解は存在しない。

よって, $p = 1$

このとき, ③より $q^2 = 4$, $q = \pm 2$

［解　説］

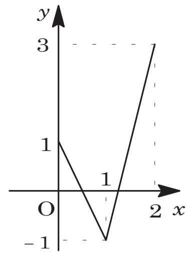
あまりにもあっさり解けすぎ, 不気味な感じのする問題です。

3

問題のページへ

$x<1$ のとき，$f(x)=x-2-3(x-1)=-2x+1$

$x\geqq 1$ のとき，$f(x)=x-2+3(x-1)=4x-5$



(i)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(-2t+1)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^x=-x^2+x$$
$$=-x(x-1)\geqq 0$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^1(-2t+1)\,dt+\int_1^2(4t-5)\,dt$$
$$=\Big[-t^2+t\Big]_x^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^2=x^2-x+1>0$$

すると，$g(x)=\left|-x^2+x\right|+\left|x^2-x+1\right|=-x^2+x+x^2-x+1=1$

(ii)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1(-2t+1)\,dt+\int_1^x(4t-5)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^x$$
$$=2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^2(4t-5)\,dt=\Big[2t^2-5t\Big]_x^2=-2x^2+5x-2$$
$$=-(2x-1)(x-2)\geqq 0$$

すると，$g(x)=\left|2x^2-5x+3\right|+\left|-2x^2+5x-2\right|=\left|2x^2-5x+3\right|-2x^2+5x-2$

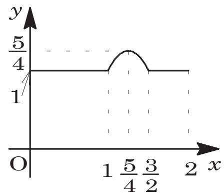
(ii-i)　$1\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$g(x)=-(2x^2-5x+3)-2x^2+5x-2=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

(ii-ii)　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき

$$g(x)=2x^2-5x+3-2x^2+5x-2=1$$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$y=g(x)$ のグラフを書くと，右図のようになる。



したがって，$g(x)$ は $x=\dfrac{5}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

［解 説］

丁寧に場合分けをし，ミスなく計算が実行できれば，正しい結論が導けます。